SYSTEME VON FLÄCHEN ZWEITEN GRADES,

DIE ZU ZWEI GEGEBENEN FLÄCHEN ZWEITEN GRADES IN EINER BESONDEREN BEZIEHUNG STEHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

VORGELEGT

VON

MAX PETRI

AUS LEIPZIG.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

LEIPZIG

DRUCK VON METZGER & WITTIG

1914

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Rohn und Hölder.

Leipzig, den 7. Juli 1914.

Der Procancellar Kirchner.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Flächen zweiten Grades ω, die von zwei vorgegebenen Flächen zweiten Grades φ und ψ die eine längs eines Kegelschnitts berühren, die andere in zwei Kegelschnitten schneiden 5

1. Mannigfaltigkeit der Flächen ω 5
2. Die vier Systeme $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ 5
3. Die in den vier Systemen ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 enthaltenen Kegelflächen 8
4. Die Flächen ω als Flächen zweiter Klasse 13
5. Zusammenfassung der Flächen ω nach Quadrupeln 17
6. Anwendungen der abgeleiteten Sätze 26

II. Weitere Flächensysteme zweiten Grades, definiert durch Polaritätsbeziehungen hinsichtlich der Flächen ω 28

1. Ort der Pole einer Ebene und der Polarebenen eines Punktes; die Flächen ϑ_i und η_i 28
2. Projektive Erzeugung der Flächen ϑ_i 32
3. Gemeinsames Polartetraeder sowie gemeinsame acht Punkte der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ 34
4. Die Flächen Θ_i, M_i und N_i 39
5. Die vier Kongruenzen der reziproken Polaren einer Geraden 44
6. Beziehungen zwischen den Flächen ϑ_i, η_i und θ_i 49

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547026_0127

I.

Flächen zweiten Grades ω, die von zwei vorgegebenen Flächen zweiten Grades φ und ψ die eine längs eines Kegelschnittes berühren, die andere in zwei Kegelschnitten schneiden.

Mannigfaltigkeit der Flächen ω.

Eine Fläche zweiten Grades ω soll hinsichtlich zweier vorgelegter Flächen zweiten Grades den folgenden beiden Bedingungen genügen:

Sie soll eine Fläche zweiten Grades ψ längs eines Kegelschnitts berühren und eine Fläche zweiten Grades φ in zwei Kegelschnitten schneiden.

Wir bezeichnen mit A die Ebene des Kegelschnitts, längs dessen ψ und ω sich berühren, mit B und B′ die Ebenen der beiden Kegelschnitte, in denen φ und ω sich schneiden. Dann muß sich ω durch die folgenden beiden Ausdrücke darstellen lassen

$$\omega \equiv \psi + \lambda \mathsf{A}^2$$

$$\omega \equiv \nu\varphi + \varkappa \mathsf{B}\mathsf{B}'.$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke enthält noch vier, der zweite noch sieben verfügbare Konstanten. Von den neun verfügbaren Konstanten der allgemeinen Fläche zweiten Grades nimmt also die erste Bedingung fünf, die zweite zwei in Anspruch. Da beide Bedingungen voneinander unabhängig sind, so nehmen sie zusammen sieben Konstante der allgemeinen Fläche in Anspruch, so daß noch zwei frei verfügbar bleiben. Die Mannigfaltigkeit der Flächen ω ist also doppelt unendlich.

Die vier Systeme ω_1 ω_2 ω_3 ω_4.

Aus den beiden Identitäten

$$\omega \equiv \psi + \lambda \mathsf{A}^2$$

$$\omega \equiv \nu\varphi + \varkappa \mathsf{B}\mathsf{B}'$$

folgt sofort die weitere:

$$\psi - \nu\varphi \equiv \varkappa \mathsf{B}\mathsf{B}' - \lambda \mathsf{A}^2.$$

Die rechte Seite dieser Identität verschwindet auf einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Scheitel der Schnittpunkt der drei Ebenen A B B′ ist. B und B′ sind Tangentialebenen dieses Kegels und zwar berühren sie längs der beiden in der Ebene A liegenden Erzeugenden. Ihre Schnittgrade s ist daher Polstrahl von A in bezug auf den Kegel. Schließlich zeigt die linke Seite der Identität, daß dieser Kegel dem Büschel angehört, welches durch die Flächen φ und ψ bestimmt ist.

Derartige Kegel gibt es vier. Ihre Scheitel sind die Eckpunkte $E_1\ E_2\ E_3\ E_4$ des gemeinsamen Polartetraeders von φ und ψ. Die drei zu einer Fläche ω gehörigen Ebenen A B B′ schneiden sich also stets in einem dieser vier Punkte. Die Flächen ω zerfallen hiernach in vier Systeme $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$. Die drei Ebenen A B B′, welche einer Fläche ω_i entsprechen, haben den Punkt E_i gemeinsam. Drei solche Ebenen mögen $A_i\ B_i\ B_i'$ heißen. Bezeichnet man noch mit K_i denjenigen der vier Kegel, dessen Scheitel in E_i liegt, so gilt demnach:

Die Flächen ω bilden vier Systeme $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$. Die zu einer Fläche ω_i gehörigen Ebenen $A_i\ B_i\ B_i'$ schneiden sich in der Ecke E_i des gemeinsamen Polartetraeders von φ und ψ. Dabei sind B_i und B_i', irgend zwei Tangentialebenen des Kegels K_i, während A_i durch ihre Berührungslinien hindurchgeht. Ihre Schnittgerade s_i ist daher Polstrahl von A_i in bezug auf K_i. Auf s_i liegen die beiden Doppelpunkte der Schnittkurve von φ und ω_i. Beide Flächen berühren sich also in ihren Schnittpunkten mit s_i.

Zur weiteren analytischen Behandlung wählen wir als Koordinatentetraeder das gemeinsame Polartetraeder von φ und ψ. Seine Eckpunkte sind die vier Punkte $E_1\ E_2\ E_3\ E_4$, seine Seiten mögen $E_1\ E_2\ E_3\ E_4$ heißen. Bezogen auf dieses Tetraeder haben φ und ψ Gleichungen der Form:

$$\psi \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0\,,$$

$$\varphi \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0\,.$$

Die Koordinaten von vier Ebenen $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ bezeichnen wir in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_1&: \quad A_{11}\, A_{21}\, A_{31}\, A_{41},\\
\mathsf{A}_2&: \quad A_{12}\, A_{22}\, A_{32}\, A_{42},\\
\mathsf{A}_3&: \quad A_{13}\, A_{23}\, A_{33}\, A_{43},\\
\mathsf{A}_4&: \quad A_{14}\, A_{24}\, A_{34}\, A_{44}.
\end{aligned}$$

Entsprechend bezeichnen wir mit B_{ki} und B'_{ki} die Koordinaten der Ebene B_i und B_i'.

Da die drei Ebenen $\mathsf{A}_i\,\mathsf{B}_i\,\mathsf{B}_i'$ stets die Tetraederecke E_i enthalten, so muß stets sein:

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= 0,\\
B_{ii} &= 0,\\
B_{ii}' &= 0.
\end{aligned}$$

Für die Ebenen A_i besteht außer dieser Bedingung keine weitere; B_i und B_i' sind überdies Tangentialebenen von K_i. Setzt man

$$D_{ik} = a_i b_k - b_i a_k,$$

so sind die Gleichungen dieser vier Kegelflächen:

$$\begin{aligned}
K_1 &\equiv \qquad\qquad x_2^{\,2} D_{21} + x_3^{\,2} D_{31} + x_4^{\,2} D_{41} = 0,\\
K_2 &\equiv x_1^{\,2} D_{12} \qquad\quad + x_3^{\,2} D_{32} + x_4^{\,2} D_{42} = 0,\\
K_3 &\equiv x_1^{\,2} D_{13} + x_2^{\,2} D_{23} \qquad\quad + x_4^{\,2} D_{43} = 0,\\
K_4 &\equiv x_1^{\,2} D_{14} + x_2^{\,2} D_{24} + x_3^{\,2} D_{34} \qquad\quad = 0.
\end{aligned}$$

Um die Gleichung von ω_i zu erhalten, benutzen wir die Beziehung, daß der Polstrahl s_i der Ebene A_i in bezug auf K_i die Flächen φ und $\omega_i \equiv \psi + \lambda_i \mathsf{A}_i^{\,2} = 0$ in dem nämlichen Punktepaar schneidet. Wir erhalten für $i = 4$:

Ein Punkt von s_4 hat die Koordinaten

$$x_1 = \frac{A_{14}}{D_{14}}, \qquad x_2 = \frac{A_{24}}{D_{24}}, \qquad x_3 = \frac{A_{34}}{D_{34}}, \qquad x_4.$$

Es gelten demnach die Relationen:

$$b_1 \frac{A_{14}^{\,2}}{D_{14}^{\,2}} + b_2 \frac{A_{24}^{\,2}}{D_{24}^{\,2}} + b_3 \frac{A_{34}^{\,2}}{D_{34}^{\,2}} + b_4 x_4^{\,2} = 0,$$

$$a_1 \frac{A_{14}^{\,2}}{D_{14}^{\,2}} + a_2 \frac{A_{24}^{\,2}}{D_{24}^{\,2}} + a_3 \frac{A_{34}^{\,2}}{D_{34}^{\,2}} + a_4 x_4^{\,2} + \lambda_4 \left(\frac{A_{14}^{\,2}}{D_{14}} + \frac{A_{24}^{\,2}}{D_{24}} + \frac{A_{34}^{\,2}}{D_{34}} \right)^2 = 0.$$

Hieraus folgt aber:

$$\left(\frac{A_{14}^{\,2}}{D_{14}} + \frac{A_{24}^{\,2}}{D_{24}} + \frac{A_{34}^{\,2}}{D_{34}} \right) + \lambda_4 b_4 \left(\frac{A_{14}^{\,2}}{D_{14}} + \frac{A_{24}^{\,2}}{D_{24}} + \frac{A_{34}^{\,2}}{D_{34}} \right)^2 = 0$$

oder $$\frac{1}{\lambda_4} = -b_4\left(\frac{A_{14}^2}{D_{14}} + \frac{A_{24}^2}{D_{24}} + \frac{A_{34}^2}{D_{34}}\right).$$

Es ergibt sich als Gleichung von ω_4:

$$\omega_4 \equiv b_4 H_4 \psi - \mathsf{A}_4^2 = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$H_4 \equiv \frac{A_{14}^2}{D_{14}} + \frac{A_{24}^2}{D_{24}} + \frac{A_{34}^2}{D_{34}}$$

gesetzt wird.

Wir erhalten sonach die vier Flächensysteme ω_i:

$$\omega_1 \equiv b_1 H_1 \psi - \mathsf{A}_1^2 = 0, \quad \text{wo} \quad H_1 \equiv \frac{A_{21}^2}{D_{21}} + \frac{A_{31}^2}{D_{31}} + \frac{A_{41}^2}{D_{41}},$$

$$\omega_2 \equiv b_2 H_2 \psi - \mathsf{A}_2^2 = 0, \qquad H_2 \equiv \frac{A_{12}^2}{D_{12}} + \frac{A_{32}^2}{D_{32}} + \frac{A_{42}^2}{D_{42}},$$

$$\omega_3 \equiv b_3 H_3 \psi - \mathsf{A}_3^2 = 0, \qquad H_3 \equiv \frac{A_{13}^2}{D_{13}} + \frac{A_{23}^2}{D_{23}} + \frac{A_{43}^2}{D_{43}},$$

$$\omega_4 \equiv b_4 H_4 \psi - \mathsf{A}_4^2 = 0, \qquad H_4 \equiv \frac{A_{14}^2}{D_{14}} + \frac{A_{24}^2}{D_{24}} + \frac{A_{34}^2}{D_{34}}$$

ist.

Nachdem sich λ_i rational in den Koordinaten von A_i ausdrückt, gehört zu jeder Ebene A_i durch die Ecke E_i des gemeinsamen Polartetraeders von φ und ψ eine Fläche ω_i. Enthält die Ebene A_i jedoch eine weitere Tetraederecke E_k, so entspricht ihr noch eine Fläche ω_k. Enthält sie schließlich noch die Ecke E_l, ist sie also identisch mit einer der vier Tetraederebenen, so entsprechen ihr drei Flächen ω, die den drei Systemen $\omega_i\ \omega_k\ \omega_l$ angehören.

Wählt man als Ebene A_i insbesondere eine Tangentialebene des Kegels K_i, so fallen die Ebenen B_i und B_i' beide mit A_i zusammen. Für eine solche Ebene A_i verschwindet der Ausdruck H_i. Die Gleichung liefert in diesem Falle als Fläche ω_i die doppelt gezählte Ebene A_i.

Die unter den Flächen ω enthaltenen Kegelflächen.

Jedes System von Flächen ω_i enthält einfach unendlich viele Kegelflächen. Sie werden bestimmt im System ω_4 durch das Verschwinden der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_4 A_{14}^2 & \lambda_4 A_{14} A_{24} & \lambda_4 A_{14} A_{34} & 0 \\ \lambda_4 A_{14} A_{24} & a_2 + \lambda_4 A_{24}^2 & \lambda_4 A_{24} A_{34} & 0 \\ \lambda_4 A_{14} A_{34} & \lambda_4 A_{24} A_{34} & b_3 + \lambda_4 A_{34}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

Da wir die Fläche ψ selbst als nicht singulär annehmen, so ist a_4 jedenfalls von Null verschieden. Als Bedingung für eine Kegelfläche des Systems ω_4 erhält man daher die Gleichung:

$$a_1 a_2 a_3 + \lambda_4 (A_{14}^2 a_2 a_3 + A_{24}^2 a_1 a_3 + A_{34}^2 a_1 a_2) = 0$$

oder

$$\frac{A_{14}^2 b_1}{a_1 D_{14}} + \frac{A_{24}^2 b_2}{a_2 D_{24}} + \frac{A_{34}^2 b_3}{a_3 D_{34}} = 0.$$

Diese Gleichung, zusammen mit der Gleichung $A_{44} = 0$, sagt aus, daß die Ebene A_4 Tangentialebene des Kegels

$$x_1^2 \frac{a_1}{b_1} D_{14} + x_2^2 \frac{a_2}{b_2} D_{34} + x_3^2 \frac{a_3}{b_3} D_{34} = 0$$

ist.

Ist daher A_4 Tangentialebene dieser Kegelfläche zweiter Ordnung, so ist die zugehörige Fläche ω_4 selbst ein Kegel.

Wir haben damit das Resultat:

Sobald ω_4 Kegelfläche ist, umhüllen die Ebenen A_4 einen Kegel zweiter Ordnung

$$\mathsf{T}_4 \equiv x_1^2 \frac{a_1}{b_1} D_{14} + x_2^2 \frac{a_2}{b_2} D_{24} + x_3^2 \frac{a_3}{b_3} D_{34} = 0.$$

Gleichzeitig sind die Geraden s_4 Erzeugende eines zweiten Kegels zweiter Ordnung

$$\Sigma_4 \equiv x_1^2 \frac{b_1}{a_1} D_{14} + x_2^2 \frac{b_2}{a_2} D_{24} + x_3^2 \frac{b_3}{a_3} D_{34} = 0.$$

Dieser ist polarrreziprok zu T_4 in bezug auf K_4.

Für die drei Systeme $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ gilt das Entsprechende. Man erhält also vier Kegel T_i und vier Kegel Σ_i, deren Gleichungen denen von T_4 und Σ_4 analog sind.

Aus der Form dieser Gleichungen erkennt man zunächst: Sobald die Flächen ψ und φ ihre Rolle vertauschen, vertauschen sich auch die vier Kegel T_i mit den vier Kegeln Σ_i. Weiterhin sieht man, daß sowohl die Determinante der vier Kegel T_i als die Determinante der vier Kegel Σ_i bis auf einen nicht verschwindenden Faktor den folgenden Wert hat:

$$\begin{vmatrix} 0 & D_{21} & D_{31} & D_{41} \\ D_{12} & 0 & D_{32} & D_{42} \\ D_{13} & D_{23} & 0 & D_{43} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber vom Range zwei; denn sie ist die Determinante der vier Kegel K_i, welche einem Büschel angehören.

Es folgt also, daß auch die vier Kegel T_i und die vier Kegel Σ_i je einem Büschel angehören. Diese beiden Büschel bestimmen sich folgendermaßen:

Die Formen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ haben die beiden simultanen Kovarianten:

$$\psi'(x) \equiv \frac{b_1^2}{a_1} x_1^2 + \frac{b_2^2}{a_2} x_2^2 + \frac{b_3^2}{a_3} x_3^2 + \frac{b_4^2}{a_4} x_4^2,$$

$$\varphi'(x) \equiv \frac{a_1^2}{b_1} x_1^2 + \frac{a_2^2}{b_2} x_2^2 + \frac{a_3^2}{b_3} x_3^2 + \frac{a_4^2}{b_4} x_4^2.$$

Diese verschwinden auf zwei Flächen zweiten Grades, und zwar ist die Fläche $\psi'(x) = 0$ polarreziprok zu ψ in bezug auf φ, die Fläche $\varphi'(x) = 0$ polarreziprok zu φ in bezug auf ψ.

Sucht man die Gleichungen der vier Kegel auf, welche dem Büschel $\psi + \varrho\,\varphi' = 0$ angehören, so zeigt sich, daß diese Kegel identisch sind mit den vier Kegeln $\mathsf{T}_1\,\mathsf{T}_2\,\mathsf{T}_3\,\mathsf{T}_4$. In gleicher Weise sind die dem Büschel $\psi' + \varrho\,\varphi = 0$ angehörenden vier Kegel identisch mit den Kegeln $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3\,\Sigma_4$.

Wir erhalten sonach das Resultat: *Eine Fläche ω ist dann und nur dann Kegelfläche, wenn die Ebene* A *Doppeltangentialebene der Durchdringungskurve von ψ und φ' ist. Gleichzeitig ist die Gerade s Sehne der Durchdringungskurve von φ und ψ'.* Die Punktepaare, in denen die Kegelflächen eines Systems ω_i die Fläche φ berühren, liegen demnach auf der Fläche ψ'.

Der Scheitel eines Kegels ω_i ist der Pol P_i der zugehörigen Ebene A_i in bezug auf ψ. Da aber die Ebenen A_i den Kegel T_i mit dem Scheitel E_i umhüllen, so ist der Ort ihrer Pole bezüglich ψ ein in der Ebene E_i gelegener Kegelschnitt l_i; dieser ist reziprok polar zu T_i in bezug auf ψ.

Als Gleichung des Kegelschnittes l_4 findet man:

$$l_4 \equiv u_1^2 \frac{D_{14}}{a_1 b_1} + u_2^2 \frac{D_{24}}{a_2 b_2} + u_3^2 \frac{D_{34}}{a_3 b_3} = 0.$$

Man bestätigt leicht, daß $l_1\,l_2\,l_3\,l_4$ die Grenzflächen der durch ψ und φ bestimmten Schar sind.

Es gilt also: *Die Gesamtheit der Tangentialkegel von ψ, die φ in zwei Kegelschnitten schneiden, zerfällt in vier Systeme. Die Scheitel der einem System angehörenden Kegel liegen je auf einem*

der vier Kegelschnitte, die als Grenzflächen zweiter Klasse der durch ψ und φ bestimmten Schar angehören.

Da diese Grenzflächen zu φ und ψ in symmetrischer Beziehung stehen, so kann man allgemeiner sagen:

Der Ort der Scheitel aller Kegel, die von zwei Flächen 2. Grades die eine längs eines Kegelschnitts berühren, die andere in zwei Kegelschnitten schneiden, besteht in den 4 Grenzflächen der durch beide Flächen bestimmten Schar.

Schließlich folgt hieraus noch: Ist eine Schar von Flächen 2. Klasse gegeben, und schneidet ein Tangentialkegel einer Fläche der Schar eine andere in 2 Kegelschnitten, so schneidet er auch alle übrigen Flächen der Schar in 2 Kegelschnitten. — Jedes System ω_i enthält auch 2 Zylinder. Unter den Tangentialzylindern einer Fläche zweiten Grades gibt es daher im allgemeinen acht, welche eine zweite Fläche zweiten Grades in zwei Kegelschnitten schneiden.

Dagegen sind unter den Flächen ω im allgemeinen keine Rotationskegel enthalten; denn die Scheitel derjenigen Tangentialkegel von ψ, welche zugleich Rotationskegel sind, liegen auf den drei Fokalkegelschnitten dieser Fläche. Diese haben aber im allgemeinen mit den Grenzflächen der durch ψ und φ bestimmten Schar keine gemeinsamen Punkte.

Ein jeder der vier Kegelschnitte l_i schneidet die Fläche φ in vier Punkten P_i. Diese 16 Punkte sind die Scheitel von 16 Tangentialkegeln von ψ, die φ in einem Geradenpaar, den beiden Erzeugenden durch P_i, und einem eigentlichen Kegelschnitt schneiden.

Da die Scheitel dieser 16 Kegel auf φ liegen, so berühren die entsprechenden 16 Ebenen A als Polarebenen jener Scheitel bezüglich ψ die Fläche φ', welche zu φ in bezug auf ψ polarreziprok ist. Sie sind demnach die 16 Doppeltangentialebenen der Schnittkurve von ψ und φ', die zugleich Tangentialebenen von φ' sind.

Da die 16 Kegel aus der Fläche φ je ein Geradenpaar ausschneiden, so muß eine der entsprechenden beiden Ebenen B und B′ — es sei dies die Ebene B — Tangentialebene von φ sein. Ihr Berührungspunkt auf φ ist der Scheitel des betreffenden Kegels. Da jede Ebene B die Durchdringungskurve von φ und ψ doppelt berührt, so sind jene 16 Ebenen B iden-

tisch mit den 16 Doppeltangentialebenen dieser Kurve, die zugleich φ berühren.

Die Koordinaten der 16 Kegelscheitel P_i sind die folgenden:

$$P_1: \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : \pm \sqrt{\frac{D_{21} D_{34}}{b_2}} : \pm \sqrt{\frac{D_{31} D_{42}}{b_3}} : \pm \sqrt{\frac{D_{41} D_{23}}{b_4}},$$

$$P_2: \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \pm \sqrt{\frac{D_{12} D_{34}}{b_1}} : 0 : \pm \sqrt{\frac{D_{32} D_{41}}{b_3}} : \pm \sqrt{\frac{D_{42} D_{13}}{b_4}},$$

$$P_3: \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \pm \sqrt{\frac{D_{13} D_{24}}{b_1}} : \pm \sqrt{\frac{D_{23} D_{41}}{b_2}} : 0 : \pm \sqrt{\frac{D_{43} D_{12}}{b_4}},$$

$$P_4: \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \pm \sqrt{\frac{D_{14} D_{23}}{b_1}} : \pm \sqrt{\frac{D_{24} D_{31}}{b_2}} : \pm \sqrt{\frac{D_{34} D_{12}}{b_3}} : 0.$$

Die 16 Ebenen B_i haben als Tangentialebenen von φ in den Punkten P_i die Koordinaten:

$$\mathsf{B}_1: \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 0 : \pm \sqrt{b_2 D_{21} D_{34}} : \pm \sqrt{b_3 D_{31} D_{42}} : \pm \sqrt{b_4 D_{44} D_{23}},$$

$$\mathsf{B}_2: \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \pm \sqrt{b_1 D_{12} D_{34}} : 0 : \pm \sqrt{b_3 D_{32} D_{41}} : \pm \sqrt{b_4 D_{42} D_{13}},$$

$$\mathsf{B}_3: \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \pm \sqrt{b_1 D_{13} D_{24}} : \pm \sqrt{b_2 D_{23} D_{41}} : 0 : \pm \sqrt{b_4 D_{43} D_{12}},$$

$$\mathsf{B}_4: \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \pm \sqrt{b_1 D_{14} D_{23}} : \pm \sqrt{b_2 D_{24} D_{31}} : \pm \sqrt{b_3 D_{34} D_{12}} : 0.$$

Aus den Koordinaten der 16 Punkte P_i und der 16 Ebenen B_i ergeben sich sofort die folgenden Lagebeziehungen: Eine jede der 4 Ebenen B_I berührt in einem der 4 Punkte P_1; sie enthält 2 Erzeugende von φ, und jede Erzeugende geht noch durch je einen der Punkte $P_2\, P_3\, P_4$. Die 16 Punkte P_i liegen daher sowohl auf 4 Erzeugenden der einen Schar als auf 4 Erzeugenden der zweiten Schar von φ. Sie liegen ferner zu je vieren in den Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders von φ und ψ. Jene 4 Erzeugenden der einen Schar bestimmen mit den 4 Erzeugenden der anderen Schar 16 Tangentialebenen von φ. Diese 16 Ebenen sind die 16 Ebenen B_i.

Dieses Resultat läßt sich allgemeiner so aussprechen: Zwei Flächen zweiten Grades bestimmen einerseits ein Büschel zweiter Ordnung, andererseits eine Schar zweiter Klasse. Dem Büschel gehören 4 Kegel, der Schar 4 Grenzflächen an. Die 4 Kegel haben mit einer der beiden Flächen 16 Tangentialebenen, die 4 Grenzflächen 16 Punkte gemein, wobei die 16 Punkte die Berührungspunkte der 16 Ebenen sind. Es gibt nun auf derselben Fläche 4 Erzeugende der einen und 4 Er-

zeugende der andern Schar derart, daß ihre 16 Schnittpunkte und ihre 16 Ebenen mit jenen Punkten und Ebenen identisch sind. Jede Erzeugende der einen Schar liegt mit den Erzeugenden der andern Schar in 4 Ebenen durch die Ecken des gemeinsamen Polartetraeders, sie schneidet diese Erzeugenden in 4 Punkten, die den Ebenen des Polartetraeders angehören.

Als besonderer Fall dieses Satzes ergibt sich der bekannte Satz über die Lage der Kreispunkte einer Fläche zweiten Grades auf ihren acht Minimalgeraden. Denn jede Fläche zweiten Grades bestimmt zusammen mit dem unendlich fernen Kugelkreis eine Schar zweiter Klasse, die Schar der zu ihr konfokalen Flächen, welcher als Grenzflächen ihre drei Fokalkegelschnitte, sowie der unendlich ferne Kugelkreis angehören. Die 16 Durchstoßpunkte dieser 4 Kegelschnitte sind aber die 12 Kreispunkte und die 4 unendlich fernen Kugelpunkte der Fläche.

Bezüglich der zu den 16 Kegeln gehörigen Ebenen A ist gezeigt worden, daß sie jene 16 Doppeltangentialebenen der Durchdringungskurve von ψ und φ sind, die zugleich φ' berühren. Hieraus folgt dem vorigen ganz analog, daß es auf φ' acht Erzeugende — und zwar vier aus jeder Schar — gibt, so daß durch jede 4 Ebenen A hindurchgehen.

Die Flächen ω als Flächen zweiter Klasse.

Eine beliebige Fläche ω berührt die Fläche ψ längs eines Kegelschnittes und schneidet φ in zwei Kegelschnitten. Hieraus folgt, daß ω mit ψ einen doppeltzählenden Tangentialkegel zweiter Ordnung, mit φ zwei einfache Tangentialkegel zweiter Ordnung gemein hat. Die Fläche ω erfüllt also hinsichtlich der Flächen φ und ψ auch die zu den ursprünglich geforderten dualen Beziehungen.

Demgemäß erhält man durch Betrachtungen, die zu den früheren dual sind, als Gleichung der Fläche ω_4 in Ebenenkoordinaten:

$$\Omega_4 \equiv a_4 J_4 \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4} \right) + P_4^2(u) = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$J_4 \equiv \frac{b_1}{a_1} \frac{A_{14}^2}{D_{14}} + \frac{b_2}{a_2} \frac{A_{24}^2}{D_{24}} + \frac{b_3}{a_3} \frac{A_{34}^2}{D_{34}}$$

gesetzt wird, während

$$P_4(u) \equiv u_1 \frac{A_{14}}{a_1} + u_2 \frac{A_{24}}{a_2} + u_3 \frac{A_{34}}{a_3} = 0$$

den Pol von A_4 in bezug auf ψ darstellt. Allgemein erhält man als Gleichung der Fläche ω_i in Ebenenkoordinaten:

$$\Omega_i \equiv a_i J_i \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4} \right) + P_i^2(u) = 0 .$$

Die Ausdrücke J_i und $P_i(u)$ sind analog zu J_4 und $P_4(u)$. —

Führt man an Stelle der Koordinaten $A_{14}\, A_{24}\, A_{34}$ der Ebene A_4 die Koordinaten $P_{14}\, P_{24}\, P_{34}$ ihres Poles bezüglich ψ in die Gleichung $\Omega_4 = 0$ ein, so tritt die dual entsprechende Bauart der beiden Gleichungen von ω_4 und Ω_4 besonders deutlich hervor. J_4 und $P_4(u)$ werden

$$J_4 = P_{14}^2 \frac{a_1 b_1}{D_{14}} + P_{24}^2 \frac{a_2 b_2}{D_{24}} + P_{34}^2 \frac{a_3 b_3}{D_{34}} ,$$

$$P_4(u) = P_{14} u_1 + P_{24} u_2 + P_{34} u_3 .$$

Entsprechend lauten die Ausdrücke J_i und $P_i(u)$. Die beiden Gleichungsformen von ω_i in Punkt- und Ebenenkoordinaten sind dann:

$$\omega_i \equiv b_i H_i (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2) - A_i^2 = 0 ,$$

$$\Omega_i \equiv a_i J_i \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4} \right) + P_i^2 = 0 .$$

Die Ebene A_i und der Punkt P_i sind Polarebene und Pol in bezug auf w. $H_i = 0$ sagt aus, daß A_i Tangentialebene des Kegels K_i ist, $J_i = 0$ sagt aus, daß der Punkt P_i dem Kegelschnitt l_i angehört.

Da die Flächen ω rücksichtlich der Flächen φ und ψ auch die zu den ursprünglich geforderten dualen Beziehungen erfüllen, so kommen ihnen als Klassenflächen Eigenschaften zu, die ihren Eigenschaften als Ordnungsflächen dual entsprechen. Die Eigenschaften lassen sich infolgedessen auch durch eine der früher angestellten dual entsprechende Betrachtung herleiten.

Bezeichnet man mit Ψ und Φ die Formen

$$\Psi = \frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4} ,$$

$$\Phi = \frac{u_1^2}{b_1} + \frac{u_2^2}{b_2} + \frac{u_3^2}{b_3} + \frac{u_4^2}{b_4} ,$$

so daß $\Psi = 0$ und $\Phi = 0$ die Gleichungen von ψ und φ in Ebenenkoordinaten vorstellen; bezeichnet man weiter mit P_i den Scheitel des Tangentialkegels, den ω_i mit ψ gemein hat, mit Q_i und Q_i' die Scheitel der beiden Tangentialkegel, die ω_i mit φ gemein hat, so müssen für ω_i die Beziehungen gelten:

$$\Omega_i \equiv \Psi + \varrho P_i^2,$$
$$\equiv \nu \Phi + \mu Q_i Q_i'.$$

Hieraus folgt die Identität:

$$\Psi - \nu \Phi \equiv \mu Q_i Q_i' - \varrho P_i^2,$$

welche aussagt: Die Punkte Q_i und Q_i' liegen auf einem Kegelschnitt l_i, und zwar sind sie die Berührungspunkte der von P_i aus an diesen Kegelschnitt gelegten Tangenten.

Für die Punkte $P_i Q_i Q_i'$ lassen sich so Beziehungen ableiten, die den für die Ebenen $\mathsf{A}_i \mathsf{B}_i \mathsf{B}_i'$ geltenden dual entsprechen. Einfacher kann man zu diesen Beziehungen gegelangen, wenn man bedenkt, daß der Punkt P_i Pol der Ebene A_i in bezug auf ψ ist. Q_i und Q_i' bestimmen sich dann als Schnittpunkte von l_i mit der Polaren von P_i in bezug auf l_i. Man erhält so die folgenden Resultate:

Ist die Ebene A_i Tangentialebene des Kegels K_i, so liegt der Punkt P_i auf einem Kegelschnitt in der Ebene E_i. Dieser Kegelschnitt ist Grenzfläche der durch ψ und φ' bestimmten Schar zweiter Klasse. Gleichzeitig umhüllen die Verbindungslinien der Punkte $Q_i Q_i'$ einen weiteren Kegelschnitt in derselben Ebene. Dieser ist Grenzfläche der durch φ und ψ' bestimmten Schar zweiter Klasse. In diesem Falle verschwindet die Determinante der Form Ω_i. Die hier betrachteten Flächen sind also die unter den Flächen ω_i als Klassenflächen enthaltenen Grenzflächen. Ihre singulären Ebenen sind Tangentialebenen des Kegels K_i.

Auf geometrischem Wege kann man in der folgenden Weise zu den erhaltenen Resultaten gelangen:

Wir betrachten zunächst das Bündel, welches durch die Flächen φ und ψ zusammen mit einer beliebigen Fäche ω bestimmt wird. Diesem Bündel gehört einerseits das Ebenenpaar BB', andererseits die doppeltgezählte Ebene A an, somit auch alle Kegelflächen, die B und B' in ihren Schnittlinien mit A berühren. Unter diesen befindet sich daher auch eine

der Kegelflächen K_i des durch φ und ψ bestimmten Büschels. Aus dem Gesagten folgt weiter, daß die acht Grundpunkte des Bündels paarweise zusammenfallen mit den Durchstoßpunkten der Schnittkurve t von φ und ψ durch die Ebene A. Die Ebenen B und B′ sind sonach Doppeltangentialebenen von t und Tangentialebenen von K_i.

Weiter schließen wir so: Die Fläche φ und eine beliebige Fläche ω berühren sich in zwei Punkten S_1 und S_2, welche auf der Schnittgeraden s von B und B′ liegen. Die gemeinsame Tangentialebene beider Flächen in einem solchen Punkte S enthält zwei Erzeugende von ω. Es sind dies die beiden Tangenten von ψ, welche von S ausgehen und jener Tangentialebene angehören. Fallen diese beiden Tangenten zusammen, so wird die betreffende Fläche ω singulär.

Dies kann in zweierlei Weise geschehen; einmal dadurch, daß S auf die Schnittkurve t von φ und ψ rückt, oder aber dadurch, daß die Tangentialebene von φ in S zugleich Tangentialebene von ψ ist.

Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ω als Klassenfläche oder als Ordnungsfläche singulär ist. Der erste Fall tritt ein, sobald S_1 und S_2 auf der Schnittkurve t von φ und ψ liegen. Dann ist die Gerade s Sehne von t, B und B′ fallen untereinander und daher auch mit A zusammen. A ist also Doppeltangentialebene von t mit den Berührungspunkten S_1 und S_2. Die Fläche ω selbst wird repräsentiert durch den in dieser Ebene gelegenen Kegelschnitt von ψ.

Im zweiten Falle ist ω singulär als Ordnungsfläche. Die Tangentialebenen von φ in den Punkten S_1 und S_2 sind hier zugleich Tangentialebenen von ψ. S_1 und S_2 gehören daher derjenigen Fläche zweiten Grades ψ' an, die zu ψ in bezug auf φ polar reziprok ist. Die Gerade s ist also Sehne der Schnittkurve t' von φ und ψ'.

Die Tangentialebenen von φ in S_1 und S_2 mögen ψ in T_1 und T_2 berühren. Diese beiden Punkte liegen auf der Schnittkurve t'' von ψ und φ'. Sie gehören außerdem der Ebene A an. A hat mit t'' vier Punkte gemein. Die Tangentialebenen von ψ in diesen vier Punkten sind zugleich Tangentialebenen von ω und von φ. Ist aber ω Kegelfläche, so haben φ und ω überhaupt nur vier paarweise zusammenfallende Tangential-

ebenen gemein. Es müssen also auch die vier Schnittpunkte von t'' und A paarweise zusammenfallen: A muß Doppeltangentialebene von t'' sein.

Die beiden Geraden $S_1 T_1$ und $S_2 T_2$ sind Erzeugende der Kegelfläche ω. Sie sind zugleich Erzeugende der den Flächen φ und ψ gemeinsam umschriebenen Developpabeln vierter Klasse. Ihr Schnittpunkt ist Scheitel von ω. Ort der Kegelscheitel ist hiernach die Doppelkurve der Developpabeln. Diese ist von der achten Ordnung und zerfällt in die vier Kegelschnitte $l_1\, l_2\, l_3\, l_4$.

Zusammenfassung der Flächen ω nach Quadrupeln.

Zwei Flächen zweiten Grades

$$\psi \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0\,,$$
$$\varphi \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0$$

bestimmen einen tetraedralen Komplex. Dieser besteht aus allen Geraden, die zu irgend einem Punkte S des Raumes sowohl bezüglich ψ als bezüglich φ konjugiert sind. Er besteht ebenso aus allen Geraden, die zu irgend einer Ebene Γ des Raumes sowohl bezüglich ψ als bezüglich φ konjugiert sind. Das singuläre Tetraeder des Komplexes ist identisch mit dem gemeinsamen Polartetraeder von ψ und φ. Jede Gerade des Komplexes schneidet die vier Tetraederebenen in Punkten, die ein festes, durch die Koeffizienten von ψ und φ bestimmtes Doppelverhältnis haben. Ebenso wird jede Gerade aus den Ecken des Polartetraeders durch vier Ebenen projiziert, die dasselbe Doppelverhältnis besitzen. Die Zuordnung zwischen diesen Geraden und den Punkten bzw. Ebenen des Raumes ist so lange eineindeutig, als der Punkt oder die Ebene nicht Ecke oder Fläche des singulären Tetraeders ist.

Die Koordinaten des Punktes S seien $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$, die der Ebene Γ: $w_1\, w_2\, w_3\, w_4$. Ferner seien π_{ik} Plückersche Achsenkoordinaten, p_{ik} Plückersche Strahlkoordinaten.

Die Koordinaten der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden sind dann

$$\pi_{ik} = z_i z_k D_{ik}\,.$$

Die Koordinaten der der Ebene Γ zugeordneten Geraden sind

$$p_{ik} = \frac{w_i w_k D_{ik}}{a_i b_i a_k b_k}\,.$$

Die dem Punkte S und die der Ebene Γ zugeordnete Gerade sind identisch, wenn zwischen den Koordinaten von S und Γ die Relationen bestehen

$$w_1 z_1 : w_2 z_2 : w_3 z_3 : w_4 z_4$$
$$= \frac{a_1 b_1}{D_{12} D_{13} D_{14}} : \frac{a_2 b_2}{D_{21} D_{23} D_{24}} : \frac{a_3 b_3}{D_{31} D_{32} D_{34}} : \frac{a_4 b_4}{D_{41} D_{42} D_{43}} .$$

Die Gleichungen der vier Ebenen durch die dem Punkte S zugeordnete Komplexgerade und die einzelnen Tetraederecken sind:

$$\mathsf{A}_1 = x_2 z_2 D_{21} + x_3 z_3 D_{31} + x_4 z_4 D_{41} = 0 ,$$
$$\mathsf{A}_2 = x_1 z_1 D_{12} + x_3 z_3 D_{32} + x_4 z_4 D_{42} = 0 ,$$
$$\mathsf{A}_3 = x_1 z_1 D_{13} + x_2 z_2 D_{23} + x_4 z_4 D_{43} = 0 ,$$
$$\mathsf{A}_4 = x_1 z_1 D_{14} + x_2 z_2 D_{24} + x_3 z_3 D_{34} = 0 .$$

Die Durchstoßpunkte der der Ebene Γ zugeordneten Komplexgraden durch die Tetraederebenen haben die Gleichungen:

$$P_1 = \frac{u_2 w_2}{a_2 b_2} D_{21} + \frac{u_3 w_3}{a_3 b_3} D_{31} + \frac{u_4 w_4}{a_4 b_4} D_{41} = 0 ,$$
$$P_2 = \frac{u_1 w_1}{a_1 b_1} D_{12} + \frac{u_3 w_3}{a_3 b_3} D_{32} + \frac{u_4 w_4}{a_4 b_4} D_{42} = 0 ,$$
$$P_3 = \frac{u_1 w_1}{a_1 b_1} D_{13} + \frac{u_2 w_2}{a_2 b_2} D_{23} + \frac{u_4 w_4}{a_4 b_4} D_{43} = 0 ,$$
$$P_4 = \frac{u_1 w_1}{a_1 b_1} D_{14} + \frac{u_2 w_2}{a_2 b_2} D_{24} + \frac{u_3 w_3}{a_3 b_3} D_{34} = 0 .$$

Für zwei beliebige Flächen ω gilt nun der Satz: Ihre Durchdringungskurve zerfällt in zwei Kegelschnitte, da sie beide die nämliche Fläche zweiten Grades ψ längs eines Kegelschnittes berühren. Sie berühren sich in zwei Punkten, die auf der Schnittgeraden der beiden zugehörigen Ebenen A liegen. Man kann nun vier Flächen ω aus den Systemen $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$ zu einem Quadrupel vereinigen, derart, daß die zugehörigen vier Ebenen $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_3 \mathsf{A}_4$ durch die obigen Gleichungen definiert sind; sie schneiden sich dann in einer Geraden des durch ψ und φ bestimmten tetraedralen Komplexes. Diese Gerade ist gemeinsame Berührungsachse der vier Flächen ω,

und zwar berühren sie sich sämtlich in den Durchstoßpunkten dieser Geraden durch ψ.

Eine derartige Zusammenfassung der Flächen ω ist gleichbedeutend mit einer Zusammenfassung je solcher vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$, für welche die vier Geraden $s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ sich in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Punkt S, dem die Schnittgerade der vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ als Komplexgerade zugeordnet ist.

Denn angenommen, die vier Geraden $s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ schneiden sich in einem Punkte S; dann erhält man die vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ als Polarebenen dieses Punktes in bezug auf die vier Kegel $K_1\,K_2\,K_3\,K_4$. Da diese dem Büschel $\psi + \varrho\,\varphi = 0$ angehören, so schneiden sich die Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ in der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden.

Und umgekehrt: Schneiden sich $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ in der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden, so ist A_i jedenfalls Polarebene von S bezüglich K_i; denn A_i enthält den Scheitel von K_i und die dem Punkte S zugeordnete Komplexgerade. Es geht demnach der Polstrahl von A_i bezüglich K_i durch S, oder: die vier Geraden $s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ schneiden sich im Punkte S.

Es gilt also der Satz: Die vier Geraden $s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ schneiden sich dann und nur dann in einem Punkte S, wenn die vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ sich in der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden schneiden. Die Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ haben also in diesem Falle stets das nämliche Doppelverhältnis.

Es hat nun weiterhin jede Fläche ω_i mit ψ einen doppeltzählenden Tangentialkegel gemein, dessen Scheitel P_i Pol von A_i bezüglich ψ ist. Sobald sich also die vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ in einer Geraden schneiden, liegen die vier Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ auf einer zweiten Geraden, und zwar sind sie deren Durchstoßpunkte durch die Ebenen des Koordinatentetraeders. Ihr Doppelverhältnis ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$. Hieraus folgt: Schneiden sich die vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$ in einer Geraden des durch ψ und φ bestimmten tetraedralen Komplexes, so liegen die vier Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ auf einer Geraden, die demselben Komplex angehört.

Vier solche Punkte P_i haben als Pole der vier Ebenen A_i in bezug auf ψ die Gleichungen:

$$P_1 \equiv \frac{z_2 D_{21}}{a_2} u_2 + \frac{z_3 D_{31}}{a_3} u_3 + \frac{z_4 D_{41}}{a_4} u_4 = 0,$$

$$P_2 \equiv \frac{z_1 D_{12}}{a_1} u_1 + \frac{z_3 D_{32}}{a_3} u_3 + \frac{z_4 D_{42}}{a_4} u_4 = 0,$$

$$P_3 \equiv \frac{z_1 D_{13}}{a_1} u_1 + \frac{z_2 D_{23}}{a_2} u_2 + \frac{z_4 D_{43}}{a_4} u_4 = 0,$$

$$P_4 \equiv \frac{z_1 D_{14}}{a_1} u_1 + \frac{z_2 D_{24}}{a_2} u_2 + \frac{z_3 D_{34}}{a_3} u_3 = 0.$$

Vergleicht man diese vier Gleichungen mit denjenigen der vier Punkte, in denen die der Ebene Γ zugeordnete Komplexgerade die Tetraederebenen trifft, so erkennt man, daß die Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ derjenigen Komplexgeraden angehören, die der Ebene Γ mit den Koordinaten

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = b_1 z_1 : b_2 z_2 : b_3 z_3 : b_4 z_4$$

zugeordnet ist. Diese Ebene Γ ist also die Polarebene des Punktes S in bezug auf φ.

Der Punkt P_i ist Pol von Γ in bezug auf die Grenzfläche l_i. Denn: l_i gehört der Schar $\Psi + \varrho \Phi = 0$ an. Der Pol von Γ bezüglich l_i liegt daher auf der dieser Ebene zugeordneten Komplexgeraden und zwar in der singulären Ebene von l_i, ist also mit P_i identisch. Hieraus folgt aber, daß die beiden Schnittpunkte von Γ und l_i mit den Punkten Q_i und Q_i' identisch sind.

Es gilt hiernach der zu dem Früheren duale Satz:

Die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_1' Q_2' Q_3' Q_4'$ liegen dann und nur dann in einer Ebene Γ, wenn die Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ auf der dieser Ebene zugeordneten Komplexgeraden liegen.

Zusammenfassend kann man sagen:

Die vier Flächen $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$ eines Quadrupels berühren sich in zwei Punkten der Fläche ψ. Diese beiden Punkte liegen auf der einem Raumpunkt S zugeordneten Komplexgeraden. Die acht Berührungspunkte derselben vier Flächen ω_i mit der Fläche φ liegen auf den Verbindungslinien von S mit den Tetraederecken. Zugleich liegen die Scheitel P_i der vier Tangentialkegel, die den Flächen des Quadrupels mit ψ gemeinsam sind, auf der einer Ebene Γ zugeordneten Komplexgeraden. Diese Ebene enthält die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_1' Q_2' Q_3' Q_4'$ und ist Polarebene des Punktes S bezüglich der Fläche φ.

Verwendet man die Koordinaten des Punktes S als homogene Parameter, so hat man für die Flächen des Quadrupels die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= b_1(z_2^2 D_{21} + z_3^2 D_{31} + z_4^2 D_{41})\cdot\psi \\
&\quad - (x_2 z_2 D_{21} + x_3 z_3 D_{31} + x_4 z_4 D_{41})^2 = 0, \\
\omega_2 &= b_2(z_1^2 D_{12} + z_3^2 D_{32} + z_4^2 D_{42})\cdot\psi \\
&\quad - (x_1 z_1 D_{12} + x_3 z_3 D_{32} + x_4 z_4 D_{42})^2 = 0, \\
\omega_3 &= b_3(z_1^2 D_{13} + z_2^2 D_{23} + z_4^2 D_{43})\cdot\psi \\
&\quad - (x_1 z_1 D_{13} + x_2 z_2 D_{23} + x_4 z_4 D_{43})^2 = 0, \\
\omega_4 &= b_4(z_1^2 D_{14} + z_2^2 D_{24} + z_3^2 D_{34})\cdot\psi \\
&\quad - (x_1 z_1 D_{14} + x_2 z_2 D_{24} + x_3 z_3 D_{34})^2 = 0.
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, *daß der Punkt S der Fläche φ angehört.* Da S gemeinsamer Punkt der vier Geraden $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ ist, so hat dies zur Folge, daß die vier Flächen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$ des betreffenden Quadrupels die Fläche φ sämtlich in S berühren. In einem beliebigen Punkte von φ berühren aber gerade vier Flächen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$. Wir haben also das Resultat: Liegt der Punkt S auf φ, so sind die vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ des durch ihn bestimmten Quadrupels identisch mit den vier Flächen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$, welche φ in S berühren. Vier derartige Flächen berühren sich untereinander in den nämlichen drei Punkten, denn zu den beiden Schnittpunkten von ψ mit der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden tritt als dritter Berührungspunkt der Punkt S selbst hinzu. Sollen sich aber zwei Flächen zweiten Grades in drei Punkten berühren, so muß ihre Durchdringungskurve entweder drei Doppelpunkte besitzen, d. h. sie muß in einen Kegelschnitt und zwei sich schneidende Gerade zerfallen, oder sie muß aus einem doppeltgezählten Kegelschnitt bestehen. Der letzte Fall kommt hier nicht in Betracht, wovon man sich wie folgt überzeugt.

Die vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ berühren die Fläche φ im Punkte S. Ihre gemeinsame Tangentialebene in diesem Punkte ist die Ebene Γ. Γ enthält also zwei Erzeugende, einer jeden der vier Flächen. Diese beiden Erzeugenden gehören aber den vier Flächen gemeinsam an, denn sie sind in jedem Falle bestimmt als die beiden Tangenten von ψ, welche durch S

gehen und in Γ liegen. Ihre Berührungspunkte auf ψ sind zugleich die Durchstoßpunkte der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden.

Die vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$, welche die Fläche φ in einem beliebigen Punkte S berühren, haben also ein festes Geradenpaar gemein, dessen Scheitel der Punkt S und dessen Ebene die Tangentialebene Γ von φ im Punkte S ist. Das Geradenpaar berührt die Fläche ψ in ihren Schnittpunkten mit der dem Punkte S zugeordneten Komplexgeraden.

Wir wollen ferner noch spezieller annehmen, daß der Punkt S der Durchdringungskurve t' von φ und ψ' angehört. Es ergeben sich dann die folgenden Verhältnisse. Die Tangentialebene Γ von φ im Punkte S ist zugleich Tangentialebene von ψ in einem Punkte T. Die beiden Erzeugenden, welche den vier Quadrupelflächen gemeinsam sind, fallen mit der Geraden $S\,T$ zusammen. Es folgt hieraus, daß die vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ des Quadrupels Kegelflächen sind, die sich längs dieser Geraden berühren. Die Gerade ist Erzeugende der gemeinsamen Developpabeln von φ und ψ. Sie ist zugleich die der Ebene Γ zugeordnete Komplexgerade. Ihre Durchstoßpunkte durch die Tetraederebenen liegen auf den vier Kegelschnitten $l_1\,l_2\,l_3\,l_4$ und sind die Scheitel der vier Kegel des Quadrupels.

Liegt der Punkt S schließlich auf der Durchdringungskurve t von φ und ψ, so sind die vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ des betreffenden Quadrupels Grenzflächen zweiter Klasse. Die dem Punkte S zugeordnete Komplexgerade ist die Tangente von t in S. In ihr schneiden sich die vier Ebenen $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2\,\mathsf{A}_3\,\mathsf{A}_4$. Diese sind Doppeltangentialebenen von t und schneiden daher aus ψ und φ Kegelschnitte aus, die sich auf t doppelt berühren. Die vier auf ψ gelegenen Kegelschnitte repräsentieren die vier Grenzflächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ des Quadrupels.

Wir kehren jetzt wieder zu der Annahme zurück, daß der Punkt S ein beliebiger Punkt der Fläche φ sei. Die vier durch S gehenden Geraden $s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ bestimmen dann auf φ vier weitere Punkte, deren Koordinaten aus den Koordinaten von S dadurch hervorgehen, daß je eine von diesen das Vorzeichen wechselt. In jedem dieser vier Punkte wird φ von einer der vier Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ des dem Punkte S ent-

sprechenden Quadrupels berührt. Sie bestimmen ihrerseits vier weitere Quadrupel, deren jedes eine der Flächen des ersten Quadrupels enthält.

Fährt man in dieser Weise fort, durch die erhaltenen Punkte die vier Geraden $s_1\, s_2\, s_3\, s_4$ zu legen und deren Durchstoßpunkte durch φ zu bestimmen, so gelangt man, vom Punkte S ausgehend, im ganzen zu acht Punkten von φ. Es sind dies diejenigen acht Punkte, deren Koordinaten aus denen von S durch wiederholten Vorzeichenwechsel hervorgehen. Diesen acht Punkten entsprechen nun acht Komplexgerade und acht Quadrupel von Flächen ω. Da jedes Quadrupel vier Flächen enthält, jede Fläche aber, entsprechend ihren beiden Berührungspunkten mit φ, in zwei Quadrupeln auftritt, so enthalten diese acht Quadrupel 16 Flächen ω, die sich zu je vier auf die vier Systeme verteilen.

Die 16 Tangentialkegel von ψ, deren Scheitel auf φ liegen, und die φ noch in einem Kegelschnitte schneiden, lassen sich in der angegebenen Weise zu acht Quadrupeln vereinigen. Die acht in diesem Falle auftretenden Berührungspunkte auf φ sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$z_1^{\,2} = \frac{a_1^{\,2}}{b_1 D_{12} D_{13} D_{14}}, \qquad z_3^{\,2} = \frac{a_3^{\,2}}{b_3 D_{31} D_{32} D_{34}},$$

$$z_2^{\,2} = \frac{a_2^{\,2}}{b_2 D_{21} D_{23} D_{24}}, \qquad z_4^{\,2} = \frac{a_4^{\,2}}{b_4 D_{41} D_{42} D_{43}}.$$

Ihre Koordinaten erfüllen infolge der Identitäten

$$\frac{a_1^{\,2}}{D_{12} D_{13} D_{14}} + \frac{a_2^{\,2}}{D_{21} D_{23} D_{24}} + \frac{a_3^{\,2}}{D_{31} D_{32} D_{34}} + \frac{a_4^{\,2}}{D_{41} D_{42} D_{43}} \equiv 0,$$

$$\frac{b_1^{\,2}}{D_{12} D_{13} D_{14}} + \frac{b_2^{\,2}}{D_{21} D_{23} D_{24}} + \frac{b_3^{\,2}}{D_{31} D_{32} D_{34}} + \frac{b_4^{\,2}}{D_{41} D_{42} D_{43}} \equiv 0,$$

$$\frac{a_1 b_1}{D_{12} D_{13} D_{14}} + \frac{a_2 b_2}{D_{21} D_{23} D_{24}} + \frac{a_3 b_3}{D_{31} D_{32} D_{34}} + \frac{a_4 b_4}{D_{41} D_{42} D_{43}} \equiv 0$$

die drei Gleichungen:

$$\varphi(z) = b_1\, z_1^{\,2} + b_2\, z_2^{\,2} + b_3\, z_3^{\,2} + b_4\, z_4^{\,2} = 0,$$

$$\psi'(z) = \frac{b_1^{\,2}}{a_1} z_1^{\,2} + \frac{b_2^{\,2}}{a_2} z_2^{\,2} + \frac{b_3^{\,2}}{a_3} z_3^{\,2} + \frac{b_4^{\,2}}{a_4} z_4^{\,2} = 0,$$

$$\varphi''(z) = \frac{b_1^{\,3}}{a_1^{\,2}} z_1^{\,2} + \frac{b_2^{\,3}}{a_2^{\,2}} z_2^{\,2} + \frac{b_3^{\,3}}{a_3^{\,2}} z_3^{\,2} + \frac{b_4^{\,3}}{a_4^{\,2}} z_4^{\,2} = 0.$$

Hier ist $\varphi'' = 0$ die Gleichung derjenigen Fläche zweiten Grades, die in bezug auf ψ' zu φ polarreziprok ist.

Die Punkte sind also die acht Fundamentalpunkte des Flächenbündels zweiter Ordnung, welches durch die drei Flächen φ, ψ' und φ'' bestimmt wird. Da sie der Durchdringungskurve von φ und ψ' angehören, so sind die entsprechenden 16 Flächen ω jedenfalls Kegel.

Die Tangentialebenen von φ in den acht Punkten haben die Koordinaten

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4$$

$$= \frac{a_1 b_1}{\sqrt{b_1 D_{12} D_{13} D_{14}}} : \pm \frac{a_2 b_2}{\sqrt{b_2 D_{21} D_{23} D_{24}}} : \pm \frac{a_3 b_3}{\sqrt{b_3 D_{31} D_{32} D_{34}}} : \pm \frac{a_4 b_4}{\sqrt{b_4 D_{41} D_{42} D_{43}}}.$$

Diesen acht Tangentialebenen sind acht Komplexgerade zugeordnet, deren Durchstoßpunkte durch die Tetraederebenen die Scheitel der 16 Kegel liefern. Diese Durchstoßpunkte fallen zu je zwei zusammen, entsprechend der Tatsache, daß jeder der 16 Kegel in zwei Quadrupeln auftritt. Bezeichnet man die Durchstoßpunkte je nach ihrer Lage in der Tetraederebene E_i mit P_i, so erhält man, nach den angegebenen Formeln berechnet, für diese Punkte die folgenden Gleichungen:

$$P_1: \quad u_2 \sqrt{\frac{D_{21} D_{34}}{b_2}} \pm u_3 \sqrt{\frac{D_{31} D_{42}}{b_3}} \pm u_4 \sqrt{\frac{D_{41} D_{23}}{b_4}} = 0,$$

$$P_2: \quad u_1 \sqrt{\frac{D_{12} D_{34}}{b_1}} \pm u_3 \sqrt{\frac{D_{32} D_{41}}{b_3}} \pm u_4 \sqrt{\frac{D_{42} D_{13}}{b_4}} = 0,$$

$$P_3: \quad u_1 \sqrt{\frac{D_{13} D_{24}}{b_1}} \pm u_2 \sqrt{\frac{D_{23} D_{41}}{b_2}} \pm u_4 \sqrt{\frac{D_{43} D_{12}}{b_4}} = 0.$$

$$P_4: \quad u_1 \sqrt{\frac{D_{14} D_{23}}{b_1}} \pm u_2 \sqrt{\frac{D_{24} D_{31}}{b_2}} \pm u_3 \sqrt{\frac{D_{34} D_{12}}{b_3}} = 0.$$

Diese 16 Punkte sind aber die 16 Durchstoßpunkte der vier Grenzflächen $l_1 l_2 l_3 l_4$ durch die Fläche φ. Die 16 hier auftretenden Kegel sind sonach identisch mit jenen 16 Tangentialkegeln von ψ, deren Scheitel auf φ liegen, und die φ noch in einem Kegelschnitte schneiden. Die Scheitel der Kegel liegen auf den den obigen acht Ebenen zugeordneten Komplexgeraden. Diese Geraden sind zugleich den folgenden acht Punkten zugeordnet:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4$$

$$= \sqrt{\frac{b_1}{D_{12} D_{13} D_{14}}} : \pm \sqrt{\frac{b_2}{D_{21} D_{23} D_{24}}} : \pm \sqrt{\frac{b_3}{D_{31} D_{32} D_{34}}} : \pm \sqrt{\frac{b_4}{D_{41} D_{42} D_{43}}},$$

welche offenbar den Gleichungen genügen:

$$\psi(y) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2 = 0,$$

$$\varphi(y) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2 = 0.$$

Die Punkte liegen also auf der Durchdringungskurve von φ und ψ; die ihnen zugeordneten Komplexgeraden sind daher Tangenten an diese Kurve.

Es ist nun bereits bewiesen worden, daß die Scheitel der vier einem Quadrupel angehörenden Kegel auf einer Komplexgeraden liegen, welche Erzeugende der gemeinsamen Developpablen von φ und ψ ist. Im vorliegenden Falle, wo die Kegel des Quadrupels zu jenen 16 Kegeln gehören, deren Scheitel auf φ liegen, ist sie zugleich Tangente an die Durchdringungskurve von φ und ψ. Die Scheitel jener 16 Kegel liegen hiernach zu je vieren auf acht Tangenten der Durchdringungskurve von φ und ψ, die zugleich Erzeugende der gemeinsamen Developpablen von φ und ψ sind. Sie liegen aber auch nach dem, was früher bewiesen worden ist, zu je vieren auf acht Erzeugenden von φ. Es sind dies also diejenigen acht Erzeugenden dieser Fläche, die zugleich die Durchdringungskurve von φ und ψ berühren und der gemeinsamen Developpablen beider Flächen angehören. Sie sind auch definiert als diejenigen Erzeugenden von φ, welche in dem durch φ und ψ bestimmten tetraedralen Komplex enthalten sind.

Wir haben also das Resultat: Die 16 Kegelflächen ω, deren Scheitel auf φ liegen, bilden acht Quadrupel, derart, daß jeder Kegel in zwei Quadrupeln auftritt. Die Berührungspunkte dieser Quadrupel auf φ sind die acht gemeinsamen Punkte der drei Flächen zweiten Grades φ, ψ' und φ''. Die Scheitel der Kegel eines Quadrupels liegen auf einer der acht Komplexgeraden, die der Fläche φ angehören, und zwar berühren sich die vier Kegel längs dieser Geraden. Es enthält demnach jeder der 16 Kegel zwei von diesen acht Geraden unter seinen Erzeugenden. Sie gehören, da sie sich im Scheitel des Kegels schneiden, den beiden auf φ liegenden Geradenscharen an. Längs einer jeden dieser beiden Erzeugenden wird der Kegel von drei weiteren der 16 Kegel berührt.

Die Rotationsflächen zweiten Grades, welche eine Fläche zweiten Grades ψ längs eines Kegelschnittes berühren.

Wählt man als Fläche φ insbesondere den unendlich fernen Kugelkreis, so ergeben sich als Flächen ω die Rotationsflächen zweiten Grades, welche ψ längs eines Kegelschnittes berühren; denn eine doppelte Berührung mit dem unendlich fernen Kugelkreis bedeutet für eine Fläche zweiten Grades Rotationssymmetrie. Eine solche Fläche hat mit dem unendlich fernen Kugelkreis zwei Tangentialkegel gemein, deren Scheitel Q_i und Q_i' sich in den beiden auf ihrer Rotationsachse gelegenen Brennpunkten befinden.

Das Koordinatentetraeder wird gebildet von den drei Hauptebenen der Fläche ψ und der unendlich fernen Ebene. Der unendlich ferne Kugelkreis hat dann als Grenzfläche zweiter Klasse die Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0\,,$$

so daß man zu setzen hat

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1\,,$$
$$b_4 = \infty\,.$$

Als Grenzflächen der durch φ und ψ bestimmten Schar treten auf die drei Fokalkegelschnitte $l_1\, l_2\, l_3$ von ψ und der unendlich ferne Kugelkreis.

Nach dem früher Gesagten liegen Q_i und Q_i' auf l_i, und P_i ist der Pol der Geraden $Q_i\, Q_i'$ in bezug auf l_i.

Hiernach gibt es drei Systeme von Rotationsflächen $\omega_1\, \omega_2\, \omega_3$, welche die Fläche ψ längs eines Kegelschnittes berühren. Die Rotationsachse von ω_i kann beliebig in der Hauptebene E_i von ψ gewählt werden; ihre Schnittpunkte mit dem Fokalkegelschnitt l_i sind die Brennpunkte von ω_i. Der Pol P_i der Rotationsachse in bezug auf l_i ist Scheitel des gemeinsamen Tangentialkegels von ψ und ω_i. Dieser Kegel berührt beide Flächen in dem nämlichen Kegelschnitt, dessen Ebene A_i natürlich die Polarebene von P_i bezüglich ψ ist.

Liegt P_i auf l_i, so wird ω_i zum Rotationskegel, dessen Achse l_i in P_i berührt.

Die unter den Rotationsflächen ω enthaltenen Grenzflächen sind offenbar die Kreisschnitte der Fläche ψ, die zugehörigen

Ebenen A als singuläre Ebenen dieser Grenzflächen die Kreisschnittebenen. Für diese Ebenen gelten daher die Bedingungen:

$$A_{11} = 0 \quad \frac{A_{21}^2}{a_1 - a_2} + \frac{A_{31}^2}{a_1 - a_3} = 0,$$

$$A_{22} = 0 \quad \frac{A_{12}^2}{a_2 - a_1} + \frac{A_{32}^2}{a_2 - a_3} = 0,$$

$$A_{33} = 0 \quad \frac{A_{13}^2}{a_3 - a_1} + \frac{A_{23}^2}{a_3 - a_2} = 0.$$

Hiernach geht die Ebene A durch eine von sechs unendlich fernen Geraden, nämlich durch eine der Diagonalen des vollständigen Vierecks, welches die vier auf ψ liegenden Kugelpunkte in der unendlich fernen Ebene bilden. Die sechs unendlich fernen Geraden sind die Träger von sechs Ebenenbüscheln, die ψ in Kreisen schneiden.

Die Kugeln, welche eine Fläche zweiten Grades in zwei Punkten berühren.

Wählt man als Fläche ψ den unendlich fernen Kugelkreis, als Fläche φ eine beliebige Fläche zweiten Grades, so sind die Flächen ω identisch mit den Kugeln, die φ in zwei Punkten berühren. Die Koeffizienten $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ haben jetzt die Werte:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$
$$a_4 = \infty.$$

Das Koordinatentetraeder wird gebildet von den drei Hauptebenen der Fläche φ und der unendlich fernen Ebene.

Da der Scheitel des doppeltzählenden Tangentialkegels, den eine Kugel mit dem unendlich fernen Kugelkreis gemein hat, in ihren Mittelpunkt fällt, so ergibt sich sofort das Folgende:

Kugeln, die eine vorgegebene Fläche zweiten Grades φ in zwei Punkten berühren, gibt es drei Systeme $\omega_1\, \omega_2\, \omega_3$. Ihre Mittelpunkte erfüllen die drei Hauptebenen von φ. Eine jede Kugel ω_i hat mit φ zwei Tangentialkegel gemein, deren Scheitel auf dem Fokalkegelschnitt l_i von φ liegen als Schnittpunkte der Polaren des Kugelmittelpunktes in bezug auf l_i.

Die unter den Kugeln ω_i enthaltenen Kegel sind Minimalkegel oder Nullkugeln, die φ doppelt berühren. Ihre Scheitel erfüllen die drei Fokalkegelschnitte l_i von φ, ihre Berührungsachsen sind Erzeugende der drei Direktrixenzylinder $\Sigma_1\, \Sigma_2\, \Sigma_3$.

Die Berührungspunkte selbst erfüllen auf φ eine Raumkurve vierter Ordnung, die Schnittkurve der Kegelfläche

$$b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 = 0 .$$

II.

Weitere Flächensysteme zweiten Grades, definiert durch Polaritätsbeziehungen hinsichtlich der Flächen ω.

Der Ort der Pole einer Ebene und der Polarebenen eines Punktes in bezug auf die Flächen ω; die Flächen ϑ_i und η_i.

Eine Fläche des Systems ω_4 hat die Gleichung

$$\omega_4 \equiv \psi + \lambda_4 \mathsf{A}_4^2 = 0 .$$

Damit der Punkt (y) Pol einer Ebene (v) in bezug auf eine Fläche ω_4 sei, müssen die Relationen bestehen

$$\begin{aligned} \varrho\, v_1 &= a_1 y_1 + \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{14} , \\ \varrho\, v_2 &= a_2 y_2 + \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{24} , \\ \varrho\, v_3 &= a_3 y_3 + \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{34} , \\ \varrho\, v_4 &= a_4 y_4 \end{aligned}$$

wo $\mathsf{A}_4(y) = A_{14} y_1 + A_{24} y_2 + A_{34} y_3$ ist.

Durch Elimination der Parameter $A_{14}\, A_{24}\, A_{34}$ findet man eine Beziehung, die zwischen dem Punkt (y) und der Ebene (v) bestehen muß, wenn sie Pol und Polarebene für irgend eine Fläche ω_4 sein sollen.

Setzt man: $\varrho = \frac{a_4 y_4}{v_4}$ ein, so kommt:

$$\begin{aligned} v_4 \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{14} &= v_1 a_4 y_4 - v_4 a_1 y_1 , \\ v_4 \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{24} &= v_2 a_1 y_4 - v_4 a_2 y_2 , \\ v_4 \lambda_4 \mathsf{A}_4(y) A_{34} &= v_3 a_4 y_4 - v_4 a_3 y_3 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst

$$A_{14} : A_{24} : A_{34} = (v_1 a_4 y_4 - v_4 a_1 y_1) : (v_2 a_4 y_4 - v_4 a_2 y_2) : (v_3 a_4 y_4 - v_4 a_3 y_3) .$$

Multipliziert man die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{A_{14}}{D_{14}}$, $\frac{A_{24}}{D_{24}}$, $\frac{A_{34}}{D_{34}}$ und addiert, so erhält man:

$$-\frac{v_4}{b_4}\left(A_{14}y_1+A_{24}y_2+A_{34}y_4\right)=a_4y_4\left(\frac{v_1A_{14}}{D_{14}}+\frac{v_2A_{24}}{D_{24}}+\frac{v_3A_{34}}{D_{34}}\right)$$
$$-v_4\left(\frac{a_1y_1A_{14}}{D_{14}}+\frac{a_2y_2A_{24}}{D_{24}}+\frac{a_3y_3A_{34}}{D_{34}}\right)$$

oder:

$$v_4\left(b_1y_1\frac{A_{14}}{D_{14}}+b_2y_2\frac{A_{24}}{D_{24}}+b_3y_3\frac{A_{34}}{D_{34}}\right)$$
$$-b_4y_4\left(\frac{v_1A_{14}}{D_{14}}+\frac{v_2A_{24}}{D_{24}}+\frac{v_3A_{34}}{D_{34}}\right)=0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $A_{14}\,A_{24}\,A_{34}$ durch ihre proportionalen Werte, so erhält man die gesuchte Beziehung in der Form:

$$\frac{(v_4b_1y_1-v_1b_4y_4)(v_4a_1y_1-v_1a_4y_4)}{D_{14}}+\frac{(v_4b_2y_2-v_2b_4y_4)(v_4a_2y_2-v_2a_4y_4)}{D_{24}}$$
$$+\frac{(v_4b_3y_3-v_3b_4y_4)(v_4a_3y_3-v_3a_4y_4)}{D_{34}}=0.$$

Sobald es eine Fläche ω_4 gibt, bezüglich deren der Punkt (y) und die Ebene (v) Pol und Polarebene sind, verschwindet der obige Ausdruck. Dieser ist sowohl in den Koordinaten von (v) als in den Koordinaten von (y) vom zweiten Grade. Das heißt:

Die Pole einer Ebene (v) bezüglich der Flächen des Systems ω_4 erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung.

Die Polarebenen eines Punktes (y) bezüglich derselben Flächen umhüllen eine Fläche zweiter Klasse.

Entsprechendes gilt für die drei Systeme $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$. Wir haben das Resultat:

Die Pole einer festen Ebene (v) bezüglich sämtlicher Flächen der vier Systeme $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ erfüllen vier Flächen zweiter Ordnung. Deren Gleichungen sind:

$$\vartheta_1\equiv\frac{(v_2a_1x_1-v_1a_2x_2)(v_2b_1x_1-v_1b_2x_2)}{D_{21}}+\frac{(v_3a_1x_1-v_1a_3x_3)(v_3b_1x_1-v_1b_3x_3)}{D_{31}}$$
$$+\frac{(v_4a_1x_1-v_1a_4x_4)(v_4b_1x_1-v_1b_4x_4)}{D_{41}}=0,$$

$$\vartheta_2\equiv\frac{(v_1a_2x_2-v_2a_1x_1)(v_1b_2x_2-v_2b_1x_1)}{D_{12}}+\frac{(v_3a_2x_2-v_2a_3x_3)(v_3b_2x_2-v_2b_3x_3)}{D_{32}}$$
$$+\frac{(v_4a_2x_2-v_2a_4x_4)(v_4b_2x_2-v_2b_4x_4)}{D_{42}}=0,$$

$$\vartheta_3 \equiv \frac{(v_1 a_3 x_3 - v_3 a_1 x_1)(v_1 b_3 x_3 - v_3 b_1 x_1)}{D_{13}} + \frac{(v_2 a_3 x_3 - v_3 a_2 x_2)(v_2 b_3 x_3 - v_3 b_2 x_2)}{D_{23}} + \frac{(v_4 a_3 x_3 - v_3 a_4 x_4)(v_4 b_3 x_3 - v_3 b_4 x_4)}{D_{43}} = 0,$$

$$\vartheta_4 \equiv \frac{(v_1 a_4 x_4 - v_4 b_1 x_1)(v_1 b_4 x_4 - v_4 b_1 x_1)}{D_{14}} + \frac{(v_2 a_4 x_4 - v_4 a_2 x_2)(v_2 b_4 x_4 - v_4 b_1 x_2)}{D_{24}} + \frac{(v_3 a_4 x_4 - v_4 a_3 x_3)(v_3 b_4 x_4 - v_4 b_3 x_3)}{D_{34}} = 0.$$

Die vier Flächen gehören einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung an, da ersichtlich $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 0$ ist.

Ferner sieht man sofort, daß die Gleichungen der vier Flächen sich nicht ändern, wenn man die Koeffizienten von ψ mit den Koeffizienten von φ vertauscht. Es folgt hieraus der Satz: *Der Ort der Pole einer Ebene bezüglich aller Flächen zweiten Grades, die ψ längs eines Kegelschnittes berühren, und φ in zwei Kegelschnitten schneiden, ist identisch mit dem Ort ihrer Pole bezüglich aller Flächen zweiten Grades, die φ längs eines Kegelschnitts berühren und ψ in zwei Kegelschnitten schneiden.* Schneidet man die Fläche ϑ_i mit der Tetraederebene E_i, so erhält man die vier Kegelschnitte:

$$\vartheta_1: \quad x_1 = 0 \quad \frac{a_2 b_2}{D_{21}} x_2^2 + \frac{a_3 b_3}{D_{31}} x_3^2 + \frac{a_4 b_4}{D_{41}} x_4^2 = 0,$$

$$\vartheta_2: \quad x_2 = 0 \quad \frac{a_1 b_1}{D_{12}} x_1^2 + \frac{a_3 b_3}{D_{32}} x_3^2 + \frac{a_4 b_4}{D_{42}} x_4^2 = 0,$$

$$\vartheta_3: \quad x_3 = 0 \quad \frac{a_1 b_1}{D_{13}} x_1^2 + \frac{a_2 b_2}{D_{23}} x_2^2 + \frac{a_4 b_4}{D_{43}} x_4^2 = 0,$$

$$\vartheta_4: \quad x_4 = 0 \quad \frac{a_1 b_1}{D_{14}} x_1^2 + \frac{a_2 b_2}{D_{24}} x_2^2 + \frac{a_3 b_3}{D_{34}} x_3^2 = 0.$$

Sie sind unabhängig von den Koordinaten der Ebene (v) und fallen mit den Kegelschnitten $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ zusammen. Es enthält demnach eine jede Fläche ϑ_i den Kegelschnitt l_i.

Da die vier Flächen $\vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3\ \vartheta_4$ einem Bündel angehören, so haben sie acht Punkte gemein. Zwei von diesen acht Punkten lassen sich sofort angeben; es sind dies die beiden Pole von (v) in bezug auf ψ und φ mit den Koordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{v_1}{a_1} : \frac{v_2}{a_2} : \frac{v_3}{a_3} : \frac{v_4}{a_4}$$

und

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{v_1}{b_1} : \frac{v_2}{b_2} : \frac{v_3}{b_3} : \frac{v_4}{b_4}.$$

Was für die Pole einer beliebigen Ebene (v) gilt, gilt insbesondere für die Pole der unendlich fernen Ebene, das heißt für die Mittelpunkte der Flächen ω. Diese liegen demnach auf vier Flächen zweiter Ordnung, die einem Bündel angehören. Zwei von den Grundpunkten dieses Bündels fallen in die Mittelpunkte von φ und ψ. Ferner enthält die Mittelpunktsfläche des Systems ω_i den Kegelschnitt l_i. Dies ist von vornherein klar, da dieser Kegelschnitt der Ort der Scheitel der in dem System enthaltenen Kegel ist. Schließlich gilt noch: *Der Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, die ψ längs eines Kegelschnittes berühren und φ in zwei Kegelschnitten schneiden, ist identisch mit dem Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, die φ längs eines Kegelschnittes berühren und ψ in zwei Kegelschnitten schneiden.*

Die Polarebenen eines Punktes (y) in bezug auf die Flächen ω umhüllen vier Flächen zweiter Klasse $\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4$. Ihre Gleichungen sind die vorigen, nur sind jetzt die y konstant und die v variabel.

Die vier Flächen zweiter Klasse gehören einer Scharschar an, da

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 \equiv 0$$

ist; sie haben daher acht gemeinsame Tangentialebenen. Zwei von diesen lassen sich sofort angeben. Es sind dies die Polarebenen des Punktes (y) bezüglich der Flächen φ und ψ.

Bestimmt man für die Fläche η_i den Tangentialkegel, dessen Scheitel in der Tetraederecke E_i liegt, so erhält man die folgenden vier Kegel:

$$\eta_1\colon\quad u_1 = 0\,\frac{u_2^2}{D_{21}} + \frac{u_3^2}{D_{31}} + \frac{u_4^2}{D_{41}} = 0\,,$$

$$\eta_2\colon\quad u_2 = 0\,\frac{u_1^2}{D_{12}} + \frac{u_3^2}{D_{32}} + \frac{u_4^2}{D_{42}} = 0\,,$$

$$\eta_3\colon\quad u_3 = 0\,\frac{u_1^2}{D_{13}} + \frac{u_2^2}{D_{23}} + \frac{u_4^2}{D_{43}} = 0\,,$$

$$\eta_4\colon\quad u_4 = 0\,\frac{u_1^2}{D_{14}} + \frac{u_2^2}{D_{24}} + \frac{u_3^2}{D_{34}} = 0\,,$$

die mit $K_1\ K_2\ K_3\ K_4$ übereinstimmen. Es hat also eine jede Fläche η_i den Kegel K_i zum Tangentialkegel. Die gemeinsame Developpable zweier solcher Flächen zerfällt demnach in zwei Kegel zweiter Ordnung, deren einer der Kegel K_i ist. Es zer-

fällt also auch die Durchdringungskurve zweier Flächen η ebenso wie die zweier Flächen ϑ_i in zwei Kegelschnitte.

Projektive der Erzeugung der Flächen ϑ_i.

Bekanntlich liegen die Pole einer Ebene bezüglich aller Flächen zweiter Klasse, die einer Schar angehören, in einer Geraden. Es gehört nun jede Fläche ω_i zwei Scharen zweiter Klasse an. Die eine dieser beiden Scharen ist bestimmt durch die Fläche ω und den Doppelpunkt P_i, die andere durch die Fläche φ und das Punktepaar $Q_i Q_i'$. Der Pol einer Ebene bezüglich eines Doppelpunktes fällt aber mit dem Doppelpunkt zusammen, bezüglich eines Punktepaares liegt er auf der Achse des Punktepaares.

Hieraus folgt: Der Pol einer Ebene (v) in bezug auf eine Fläche ω_i liegt einerseits auf der Verbindungslinie q_i der Punkte P_i und P_ψ, andererseits in der Ebene H_i durch die Punkte $Q_i Q_i'$ und P_φ. Dabei bedeuten P_ψ und P_φ die Pole der Ebene (v) bezüglich ψ und φ. Der Schnittpunkt von q_i und H_i ist sonach der Pol von (v) bezüglich ω_i.

Dreht sich die Ebene H_i um eine Gerade durch P_φ, so dreht sich die Gerade q_i in einer Ebene um den Punkt P_ψ. Denn: Der Punkt P_i und die Gerade $Q_i Q_i'$ sind Pol und Polare bezüglich des Kegelschnittes l_i. Dreht sich nun H_i um eine durch P_φ gehende Gerade, so dreht sich $Q_i Q_i'$ um einen festen Punkt. Gleichzeitig bewegt sich der Punkt P_i auf einer Geraden. Infolgedessen dreht sich aber q_i um P_ψ in einer Ebene, die durch P_ψ und jene Gerade bestimmt ist.

Die Fläche zweiter Ordnung ϑ_i ist der Ort der Schnittpunkte von q_i und H_i; sie läßt sich also in der angegebenen Weise durch ein Strahlenbündel und ein dazu projektives Ebenenbündel erzeugen. Daher enthält ϑ_i die beiden Punkte P_φ und P_ψ.

Liegt ferner der Punkt P_i auf l_i, so ist seine Polare bezüglich l_i die Tangente von l_i in P_i. Q_i und Q_i' fallen mit P_i zusammen. P_i ist also in diesem Falle gemeinsamer Punkt von q_i und H_i. Hieraus folgt wiederum: Ein jeder Punkt des Kegelschnittes l_i liegt auf der Fläche ϑ_i.

Die Ebene (v) hat mit dem Kegelschnitt l_i zwei Punkte gemein. Einen dieser beiden Punkte wählen wir als Punkt P_i.

Dann ist die Gerade q_i bestimmt durch die beiden Punkte P_ψ und P_i, die Ebene H_i durch den Punkt P_φ und die Tangente von l_i in P_i. Auf dieser Tangente liegt aber der Pol der Ebene (v) in bezug auf l_i. Er befindet sich zugleich mit P_φ und P_ψ auf einer Geraden, denn φ, ψ und l_i gehören einer Schar an. H_i enthält also auch den Punkt P_ψ und damit die Gerade q_i. Diese gehört daher der Fläche ϑ_i an.

Solcher Geraden gibt es zunächst zwei, entsprechend den beiden Durchstoßpunkten von l_i durch (v). Es sind dies offenbar die Polstrahlen der Ebene (v) bezüglich der beiden Kegel ω_i, deren Scheitel in die Schnittpunkte von (v) und l_i fallen. Beide Gerade schneiden sich im Punkte P_ψ; ihre Spurpunkte in der Tetraederebene E_i liegen auf l_i und der Spurlinie der Ebene (v).

Auf Grund der bereits erkannten Symmetrie der Fläche ϑ_i gegenüber den Flächen φ und ψ ist klar, daß durch den Punkt P_φ ebenfalls zwei derartige Gerade gehen, und daß ihre Spurpunkte in der Ebene E_i die gleichen sind wie vorher.

Es ergibt sich so der Satz: Die beiden Tangentialebenen von ϑ_i in den Punkten P_φ und P_ψ gehen durch die Schnittgerade der Ebene (v) mit der Tetraederebene E_i.

Ist die Ebene (v) Tangentialebene des Kegelschnittes l_i, so fallen die beiden durch P_ψ gehenden Erzeugenden von ϑ_i zusammen. In diesem Falle ist ϑ_i demnach Kegelfläche.

Aus den doppelt unendlich vielen Flächen ω_i kann man einfach unendlich viele in der Weise herausgreifen, daß man in der Ebene E_i eine Kurve n^{ter} Ordnung bestimmt, welcher der Punkt P_i angehören soll. Die Pole der Ebene (v) in bezug auf die entsprechenden Flächen ω_i liegen dann jedenfalls auf dem Kegel n^{ter} Ordnung, der jene Kurve vom Punkte P_ψ aus projiziert. Sie gehören außerdem der Fläche zweiter Ordnung ϑ_i an, erfüllen also eine Raumkurve $2\,n^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese enthält den Punkt P_ψ.

Hieraus folgt im besonderen:

Erfüllen die Punkte P_i eine Gerade h_i, so liegen die Pole der Ebene (v) in bezug auf die entsprechenden Flächen ω_i auf einem Kegelschnitt. Dieser enthält den Punkt P_ψ, seine Ebene ist bestimmt durch P_ψ und die Gerade h_i.

Erfüllen die Punkte P_i einen Kegelschnitt, so liegen die Pole der Ebene (v) in bezug auf die entsprechenden Flächen ω_i

auf einer Raumkurve vierter Ordnung mit dem Doppelpunkt P_ψ. Hieraus folgt, wenn man als Ebene (v) die unendlich ferne Ebene, als Kegelschnitt die Grenzfläche l_i wählt: Die Mittelpunkte der unter den Flächen ω_i enthaltenen Kegel liegen auf einer Raumkurve vierter Ordnung. Diese ist Schnittkurve der Fläche ϑ_i, welche die Mittelpunkte der Flächen ω_i enthält, mit dem Kegel zweiter Ordnung, der l_i von P_ψ aus projiziert. P_ψ ist hier Mittelpunkt von ψ. Dieser Kegel hat mit ϑ_i zunächst den Kegelschnitt l_i gemein, der bereits als Ort der Kegelscheitel aufgetreten ist. Überdies aber gehören die beiden Geraden durch P_ψ nach den unendlich fernen Punkten von l_i beiden Flächen gemeinsam an. Es sind dies die Achsen der beiden unter den Flächen ω_i enthaltenen Zylinderflächen.

Die Flächen $\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4$ lassen sich natürlich in dual genau entsprechender Weise erzeugen, und auf Grund dieser Erzeugung ergeben sich für sie zu den hier abgeleiteten duale Eigenschaften.

Das gemeinsame Polartetraeder der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$.

Die vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$, welche einem Bündel angehören, besitzen überdies ein gemeinsames Polartetraeder. Zunächst erkennt man, daß der Pol der Ebene (v) bezüglich der vier Flächen derselbe ist. Er liegt auf der Geraden $P_\varphi P_\psi$ und trennt, zusammen mit (v), diese Punkte harmonisch. Hieraus folgt im besonderen, daß die Mittelpunkte der Flächen ω auf vier konzentrischen Flächen zweiten Grades liegen, deren gemeinsamer Mittelpunkt die Strecke der Mittelpunkte von φ und ψ halbiert.

Der Beweis läßt sich so führen:

Eine jede Fläche ϑ_i enthält die beiden Punkte P_φ und P_ψ. Die Tangentialebenen in diesen beiden Punkten schneiden sich auf der Ebene (v). Hieraus folgt aber, daß der Pol von (v) bezüglich ϑ_i auf der Geraden $P_\varphi P_\psi$ liegt. Da er $P_\varphi P_\psi$ zusammen mit der Ebene (v) harmonisch teilt, hat er die Koordinaten:

$$x_i = \frac{v_i}{a_i\,b_i}\,(a_i\,\Psi(v) + b_i\,\Phi(v)), \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wenn man zur Abkürzung schreibt:

$$\Psi(v) = \frac{v_1^2}{a_1} + \frac{v_2^2}{a_2} + \frac{v_3^2}{a_3} + \frac{v_4^2}{a_4},$$

$$\Phi(v) = \frac{v_1^2}{b_1} + \frac{v_2^2}{b_2} + \frac{v_3^2}{b_3} + \frac{v_4^2}{b_4}.$$

Der Punkt heiße P_v.

Punkte von der Eigenschaft, daß ihre Polarebene bezüglich der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ dieselbe ist, lassen sich noch drei weitere nachweisen. Es sind dies die Schnittpunkte der Ebene (v) mit einer Raumkurve dritter Ordnung r_v, der Ortskurve der Pole von (v) in bezug auf die Flächen des durch φ und ψ bestimmten Büschels. Die drei Punkte mögen $P_v' P_v'' P_v'''$ heißen. — Ein beliebiger Punkt von r_v besitzt die Koordinaten

$$x_i = \frac{v_i}{b_i + \lambda a_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo λ variabler Parameter ist. Für die Koordinaten seiner Polarebene bezüglich der Fläche ϑ_1 berechnet man die Werte:

$$u_1 = -(b_1 - \lambda a_1)\left(\frac{v_2^2}{b_2 + \lambda a_2} + \frac{v_3^2}{b_3 + \lambda a_3} + \frac{v_4^2}{b_4 + \lambda a_4}\right),$$

$$u_2 = v_1 v_2 \frac{b_2 - \lambda a_2}{b_2 + \lambda a_2},$$

$$u_3 = v_1 v_3 \frac{b_3 - \lambda a_3}{b_3 + \lambda a_3},$$

$$u_4 = v_1 v_4 \frac{b_4 - \lambda a_4}{b_4 + \lambda a_4}.$$

Die drei Punkte $P_v' P_v'' P_v'''$ als Schnittpunkte von (v) und r_v erhält man für die Wurzeln $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ der Gleichung dritten Grades:

$$\frac{v_1^2}{b_1 + \lambda a_1} + \frac{v_2^2}{b_2 + \lambda a_2} + \frac{v_3^2}{b_3 + \lambda a_3} + \frac{v_4^2}{b_4 + \lambda a_4} = 0.$$

Für diese Werte ist aber

$$-\left(\frac{v_2^2}{b_2 + \lambda a_2} + \frac{v_3^2}{b_3 + \lambda a_3} + \frac{v_4^2}{b_4 + \lambda a_4}\right) = \frac{v_1^2}{b_1 + \lambda a_1},$$

so daß die Polarebenen der drei Punkte $P_v' P_v'' P_v'''$ in bezug auf ϑ_1 Gleichungen der Form haben:

$$x_1 v_1 \frac{b_1 - \lambda a_1}{b_1 + \lambda a_1} + x_2 v_2 \frac{b_2 - \lambda a_2}{b_2 + \lambda a_2} + x_3 v_3 \frac{b_3 - \lambda a_3}{b_3 + \lambda a_3} + x_4 v_4 \frac{b_4 - \lambda a_4}{b_4 + \lambda a_4} = 0.$$

Für λ sind bzw. die Werte $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ zu setzen.

Während nun bei zyklischer Vertauschung der Indizes 1, 2, 3, 4 die Gleichung von ϑ_1 in die Gleichungen von $\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ übergeht, bleiben die Gleichungen der Polarebenen von $P_v'\,P_v''\,P_v'''$ ungeändert. Es hat somit jeder dieser drei Punkte dieselbe Polarebene bezüglich der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$. Diese drei Ebenen mögen $\Pi_v'\,\Pi_v''\,\Pi_v'''$ heißen, zugleich werde die Ebene (v) weiterhin mit Π_v bezeichnet.

Die vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ besitzen ein gemeinsames Polartetraeder, dessen Ecken die Punkte $P_v\,P_v'\,P_v''\,P_v'''$, dessen Ebenen die Ebenen $\Pi_v\,\Pi_v'\,\Pi_v''\,\Pi_v'''$ sind.

Die Koordinaten der drei Ebenen $\Pi_v'\,\Pi_v''\,\Pi_v'''$ sind von der Form:

$$\varrho\,u_i = v_i\,\frac{b_i - \lambda\,a_i}{b_i + \lambda\,a_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Sie genügen den Gleichungen:

$$\varrho\,\lambda\,u_i\,a_i + \varrho\,u_i\,b_i + \lambda\,v_i\,a_i - v_i\,b_i = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Daher muß

$$\begin{vmatrix} u_1\,a_1 & u_1\,b_1 & v_1\,a_1 & v_1\,b_1 \\ u_2\,a_2 & u_2\,b_2 & v_2\,a_2 & v_2\,b_2 \\ u_3\,a_3 & u_3\,b_3 & v_3\,a_3 & v_3\,b_3 \\ u_4\,a_4 & u_4\,b_4 & v_4\,a_4 & v_4\,b_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$D_{12}\,D_{34}\left(\frac{u_1\,u_2}{v_1\,v_2} + \frac{u_3\,u_4}{v_3\,v_4}\right) + D_{13}\,D_{42}\left(\frac{u_1\,u_3}{v_1\,v_3} + \frac{u_2\,u_4}{v_2\,v_4}\right) + D_{14}\,D_{23}\left(\frac{u_1\,u_4}{v_1\,v_4} + \frac{u_2\,u_3}{v_2\,v_3}\right) = 0$$

sein.

Diese Gleichung stellt den in der Ebene Π_v gelegenen Komplexkegelschnitt des durch φ und ψ bestimmten tetraedralen Komplexes dar. In der Tat müssen die Ebenen $\Pi_v'\,\Pi_v''\,\Pi_v'''$ Tangentialebenen dieses Kegelschnitts sein, denn ihre Spuren in der Ebene Π_v sind bzw. die Geraden $P_v''\,P_v'''$, $P_v'''\,P_v'$, $P_v'\,P_v''$, welche als Sehnen von r_v jenem Komplex angehören.

Ein besonderer Fall ergibt sich, wenn die Ebene Π_v und der Punkt P_v vereinigt liegen. Hier ist die Ebene Π_v gemeinsame Tangentialebene der vier Flächen ϑ_i und der Punkt P_v ihr Berührungspunkt. Von den vorher betrachteten vier harmonischen Punkten fallen zwei mit P_v zusammen, es

muß also noch ein dritter ebenfalls mit P_v zusammenfallen. Das heißt aber, es muß auch einer der Punkte P_φ und P_ψ mit Π_v vereinigt liegen, oder Π_v muß auch Tangentialebene einer der beiden Flächen φ und ψ sein. Berührungspunkt ist dann wieder der Punkt P_v. Es gilt also der Satz: Ist die Ebene Π_v Tangentialebene von φ oder ψ, so berührt sie im nämlichen Punkte auch die Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$. $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ besitzen in diesem Falle kein gemeinsames Polartetraeder.

Die analytische Bedingung für die vereinigte Lage von Π_v und P_v ist:

$$\frac{v_1^2}{a_1 b_1}\Big(a_1\,\Psi(v)+b_1\,\Phi(v)\Big)+\frac{v_2^2}{a_2 b_2}\Big(a_2\,\Psi(v)+b_2\,\Phi(v)\Big)$$
$$+\frac{v_3^2}{a_3 b_3}\Big(a_3\,\Psi(v)+b_3\,\Phi(v)\Big)+\frac{v_4^2}{a_4 b_4}\Big(a_4\,\Psi(v)+b_4\,\Phi(v)\Big)=0$$

oder

$$\Psi(v)\left(\frac{v_1^2}{b_1}+\frac{v_2^2}{b_2}+\frac{v_3^2}{b_3}+\frac{v_4^2}{b_4}\right)+\Phi(v)\left(\frac{v_1^2}{a_1}+\frac{v_2^2}{a_2}+\frac{v_3^2}{a_3}+\frac{v_4^2}{a_4}\right)=0$$

oder

$$\Psi(v)\cdot\Phi(v)=0\,.$$

Diese Bedingung sagt in der Tat aus, daß Π_v entweder Tangentialebene von ψ oder Tangentialebene von φ sein muß.

Die acht gemeinsamen Punkte der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$.

Von den acht gemeinsamen Punkten der vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ haben sich zwei, die Punkte P_φ und P_ψ, unmittelbar aus der Gleichungsform dieser Flächen ergeben. Die sechs weiteren bestimmen sich in der folgenden Weise.

Bei der projektiven Erzeugung von ϑ_i erscheint ein Punkt dieser Fläche als Schnittpunkt der Geraden $P_\psi P_i$ mit der Ebene $P_\varphi Q_i Q_i'$. Dieser Punkt ist den vier Flächen $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ gemeinsam, wenn $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ auf einer Geraden durch P_ψ, und $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_1'\,Q_2'\,Q_3'\,Q_4'$ in einer Ebene durch P_φ liegen. Es gehören aber die Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_1'\,Q_2'\,Q_3'\,Q_4'$ nur dann der nämlichen Ebene an, wenn die Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ auf der zu dieser Ebene bezüglich φ und ψ konjugierten Geraden liegen. Man hat also diejenigen durch P_φ gehenden Ebenen zu bestimmen, deren konjugierte Gerade durch P_ψ geht. Eine solche Ebene heiße Γ_φ, ihre Koordinaten w_1, w_2, w_3, w_4. Sie müssen der Gleichung genügen:

$$\frac{w_1 v_1}{b_1} + \frac{w_2 v_2}{b_2} + \frac{w_3 v_3}{b_3} + \frac{w_4 v_4}{b_4} = 0.$$

Soll die zu Γ_φ konjugierte Gerade durch P_ψ gehen, so muß Γ_φ Polarebene von P_ψ bezüglich einer Fläche der Schar $\Psi + \lambda \Phi = 0$ sein. Also:

$$\varrho\, w_i = \frac{v_i}{a_i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a_i} + \lambda \frac{1}{b_i}} = \frac{v_i b_i}{b_i + \lambda a_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \cdot$$

Der Parameter λ genügt der Gleichung dritten Grades:

$$\frac{v_1^2}{b_1 + \lambda a_1} + \frac{v_2^2}{b_2 + \lambda a_2} + \frac{v_3^2}{b_3 + \lambda a_3} + \frac{v_4^2}{b_4 + \lambda a_4} = 0.$$

Ihren Wurzeln $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ entsprechen drei Ebenen $\Gamma_\varphi' \Gamma_\varphi'' \Gamma_\varphi'''$, jede schneidet ihre konjugierte Gerade in einem gemeinsamen Punkte der vier Flächen $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4$. Die drei Punkte mögen $R_\varphi' R_\varphi'' R_\varphi'''$ heißen.

Es gibt nun ganz entsprechend drei Ebenen $\Gamma_\psi' \Gamma_\psi'' \Gamma_\psi'''$ durch P_ψ, deren konjugierte Geraden den Punkt P_φ enthalten; die Schnittpunkte der letzteren mit den ersteren nennen wir $R_\psi' R_\psi'' R_\psi'''$. Aus der symmetrischen Beziehung der Flächen ϑ_i zu φ und ψ folgt nun ohne weiteres, daß auch die Punkte $R_\psi' R_\psi'' R_\psi'''$ den vier Flächen ϑ_i gemeinsam sind.

Die Punkte $P_\varphi P_\psi R_\varphi' R_\varphi'' R_\varphi''' R_\psi' R_\psi'' R_\psi'''$ sind die acht gemeinsamen Punkte der vier Flächen $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4$.

Aus: $$\varrho\, w_i = \frac{v_i b_i}{b_i + \lambda a_i}, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4, \\ \lambda = \lambda' \lambda'' \lambda''' \end{matrix}$$

schließen wir, daß die drei Ebenen $\Gamma_\varphi' \Gamma_\varphi'' \Gamma_\varphi'''$ in bezug auf φ die Polarebenen der drei Punkte $P_v' P_v'' P_v'''$. Die konjugierten Geraden dieser drei Ebenen sind hiernach die Geraden $P_\psi P_v'$, $P_\psi P_v''$, $P_\psi P_v'''$.

Entsprechend sind die drei Ebenen $\Gamma_\psi' \Gamma_\psi'' \Gamma_\psi'''$ die Polarebenen von $P_v' P_v'' P_v'''$ in bezug auf ψ, ihre konjugierten Geraden die Geraden $P_\varphi P_v'$, $P_\varphi P_v''$, $P_\varphi P_v'''$.

Es enthalten also die Geraden $P_\psi P_v'$, $P_\psi P_v''$, $P_\psi P_v'''$ in entsprechender Reihenfolge die Punkte $R_\varphi' R_\varphi'' R_\varphi'''$, die Geraden $P_\varphi P_v'$, $P_\varphi P_v''$, $P_\varphi P_v'''$ die Punkte $R_\psi' R_\psi'' R_\psi'''$. Da $P_v' P_v'' P_v'''$ Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders der Flächen $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_2 \vartheta_4$ sind, so muß eine derartige Konfiguration der acht gemeinsamen Punkte dieser Flächen in der Tat statthaben.

Die fünf Punkte $P_\varphi P_\psi P_\nu' P_\nu'' P_\nu'''$ sind sämtlich Punkte der Raumkurve dritter Ordnung r_ν. Die Verbindungslinie je zweier unter ihnen ist daher als Sehne von r_ν Gerade des durch φ und ψ bestimmten tetraedralen Komplexes. Hieraus folgt, daß die Punkte $P_\varphi R_\varphi' R_\varphi'' R_\varphi'''$ dem Komplexkegel mit dem Scheitel P_ψ, die Punkte $P_\psi R_\psi' R_\psi'' R_\psi'''$ dem Komplexkegel mit dem Scheitel P_φ angehören.

Die Flächen $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4$.

Eine beliebige Gerade g des Raumes bestimmt vier Flächen $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4$ in der folgenden Weise:

Betrachtet man g zunächst als Achse eines Ebenenbüschels $(v + \lambda v')$, so entsprechen einer jeden Ebene dieses Büschels vier Flächen zweiter Ordnung $\vartheta_1(\lambda)$, $\vartheta_2(\lambda)$, $\vartheta_3(\lambda)$, $\vartheta_4(\lambda)$ als Ortsflächen ihrer Pole hinsichtlich der vier Systeme von Flächen $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$. Den sämtlichen Ebenen des Büschels entsprechen so vier einfach unendliche Systeme von Flächen zweiter Ordnung. Die Flächen eines jeden Systems besitzen eine Hüllfläche, die ebenfalls von der zweiten Ordnung ist. Es ist dies die Fläche Θ_i.

Betrachtet man g andererseits als Ort der Punktreihe $(y + \varkappa y')$, so entsprechen jedem Punkte von g vier Flächen zweiter Klasse $\eta_i(\varkappa)$. Den sämtlichen Punkten von g entsprechen vier einfach unendliche Systeme solcher Flächen. Die Flächen eines jeden Systems besitzen eine Hüllfläche zweiter Klasse. Diese ist identisch mit der Fläche zweiter Ordnung Θ_i.

Für das System mit dem Index 4 gestaltet sich die Rechnung etwa so:

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$\alpha_i = v_4 a_i x_i - v_i a_4 x_4,$$
$$\alpha_i' = v_4' a_i x_i - v_i' a_4 x_4,$$
$$\beta_i = v_4 b_i x_i - v_i b_4 x_4,$$
$$\beta_i' = v_4' b_i x_i - v_i' b_4 x_4.$$

$$\vartheta_4 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{D_{14}} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{D_{24}} + \frac{\alpha_3 \beta_3}{D_{34}},$$

$$\vartheta_4'' = \frac{\alpha_1' \beta_1'}{D_{14}} + \frac{\alpha_2' \beta_2'}{D_{24}} + \frac{\alpha_3' \beta_3'}{D_{34}},$$

$$\vartheta_4' = \frac{\alpha_1' \beta_1 + \alpha_1 \beta_1'}{D_{14}} + \frac{\alpha_2' \beta_2 + \alpha_2 \beta_2'}{D_{24}} + \frac{\alpha_3' \beta_3 + \alpha_3 \beta_3'}{D_{34}},$$

so hat man als Gleichung der Fläche $\vartheta_4(\lambda)$

$$\vartheta_4(\lambda) \equiv \vartheta_4 + \lambda\,\vartheta_4' + \lambda^2\,\vartheta_4'' = 0\,.$$

Als Gleichung der Hüllfläche folgt hieraus:

$$\vartheta_4'^2 - 4\,\vartheta_4\,\vartheta_4'' = 0\,.$$

Setzt man hier die obigen Ausdrücke für $\vartheta_4\,\vartheta_4'\,\vartheta_4''$ ein, so erhält man bei geeigneter Zusammenfassung der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}\vartheta_4'^2 - 4\,\vartheta_4\,\vartheta_4'' \equiv{}& \left(\frac{\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1}{D_{14}} + \frac{\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2}{D_{24}} + \frac{\alpha_3\beta_3' - \alpha_3'\beta_3}{D_{34}}\right)^2\\ &- \frac{4}{D_{14}\,D_{24}}(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2)(\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2)\\ &- \frac{4}{D_{24}\,D_{34}}(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_2'\alpha_3)(\beta_2\beta_3' - \beta_2'\beta_3)\\ &- \frac{4}{D_{34}\,D_{14}}(\alpha_3\alpha_1' - \alpha_3'\alpha_1)(\beta_3\beta_1' - \beta_3'\beta_1) = 0\,.\end{aligned}$$

Nun ist, wenn man mit π_{ik} die Plückerschen Achsenkoordinaten der Geraden g bezeichnet:

$$\begin{aligned}\alpha_i\beta_i' - \alpha_i'\beta_i &= \pi_{i4}\,x_i\,x_4\,D_{i4}\,,\\ \alpha_i\alpha_k' - \alpha_k\alpha_i' &= a_4\,x_4\,(a_i\,x_i\,\pi_{k4} - a_k\,x_k\,\pi_{i4} + a_4\,x_4\,\pi_{ik})\,,\\ \beta_i\beta_k' - \beta_k\beta_i' &= b_4\,x_4\,(b_i\,x_i\,\pi_{k4} - b_k\,x_k\,\pi_{i4} + b_4\,x_4\,\pi_{ik})\,.\end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichung der Hüllfläche spaltet sich von ihr als Faktor x_4^2 ab. Es entspricht dies der Tatsache, daß jede der Flächen $\vartheta_4(\lambda)$ den Kegelschnitt l_4 aus der Ebene $x_4 = 0$ ausschneidet. Als Gleichung der Fläche Θ_4 bleibt:

$$\begin{aligned}\Theta_4 = {}& \frac{D_{14}\,D_{24}\,D_{34}}{4\,a_4\,b_4}(\pi_{14}\,x_1 + \pi_{24}\,x_2 + \pi_{34}\,x_3)^2\\ &- D_{14}(a_2\,x_2\,\pi_{34} + a_3\,x_3\,\pi_{42} + a_4\,x_4\,\pi_{23})(b_2\,x_2\,\pi_{34} + b_3\,x_3\,\pi_{42} + b_4\,x_4\,\pi_{23})\\ &- D_{24}(a_1\,x_1\,\pi_{34} + a_3\,x_3\,\pi_{41} + a_4\,x_4\,\pi_{13})(b_1\,x_1\,\pi_{34} + b_3\,x_3\,\pi_{41} + b_4\,x_4\,\pi_{13})\\ &- D_{34}(a_1\,x_1\,\pi_{24} + a_2\,x_2\,\pi_{41} + a_4\,x_4\,\pi_{12})(b_1\,x_1\,\pi_{24} + b_2\,x_2\,\pi_{41} + b_4\,x_4\,\pi_{12}) = 0.\end{aligned}$$

Entsprechend lauten die Gleichungen der Flächen $\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3$.

Benutzt man noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= x_2\,\pi_{21} + x_3\,\pi_{31} + x_4\,\pi_{41}\,,\\ \Gamma_2 &= x_1\,\pi_{12} + x_3\,\pi_{32} + x_4\,\pi_{42}\,,\\ \Gamma_3 &= x_1\,\pi_{13} + x_2\,\pi_{23} + x_4\,\pi_{43}\,,\\ \Gamma_4 &= x_1\,\pi_{14} + x_2\,\pi_{24} + x_3\,\pi_{34}\,;\end{aligned}$$

$$\Gamma_1' = a_2 x_2 \pi_{34} + a_3 x_3 \pi_{42} + a_4 x_4 \pi_{23},$$
$$\Gamma_2' = a_1 x_1 \pi_{34} + a_3 x_3 \pi_{41} + a_4 x_4 \pi_{13},$$
$$\Gamma_3' = a_1 x_1 \pi_{24} + a_2 x_2 \pi_{41} + a_4 x_4 \pi_{12},$$
$$\Gamma_4' = a_1 x_1 \pi_{23} + a_2 x_2 \pi_{31} + a_3 x_3 \pi_{12};$$
$$\Gamma_1'' = b_2 x_2 \pi_{34} + b_3 x_3 \pi_{42} + b_4 x_4 \pi_{23},$$
$$\Gamma_2'' = b_1 x_1 \pi_{34} + b_3 x_3 \pi_{41} + b_4 x_4 \pi_{13},$$
$$\Gamma_3'' = b_1 x_1 \pi_{24} + b_2 x_2 \pi_{41} + b_4 x_4 \pi_{12},$$
$$\Gamma_4'' = b_1 x_1 \pi_{23} + b_2 x_2 \pi_{31} + b_3 x_3 \pi_{12},$$

so schreiben sich die Gleichungen der Flächen $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4$ wie folgt:

$$\Theta_1 \equiv \frac{D_{21} D_{31} D_{41}}{4 a_1 b_1} \Gamma_1^2 - (D_{21} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{31} \Gamma_3' \Gamma_3'' + D_{41} \Gamma_4' \Gamma_4'') = 0,$$
$$\Theta_2 \equiv \frac{D_{12} D_{32} D_{42}}{4 a_2 b_2} \Gamma_2^2 - (D_{12} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{32} \Gamma_3' \Gamma_3'' + D_{42} \Gamma_4' \Gamma_4'') = 0,$$
$$\Theta_3 \equiv \frac{D_{13} D_{23} D_{43}}{4 a_3 b_3} \Gamma_3^2 - (D_{13} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{23} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{43} \Gamma_4' \Gamma_4'') = 0,$$
$$\Theta_4 \equiv \frac{D_{14} D_{24} D_{34}}{4 a_4 b_4} \Gamma_4^2 - (D_{14} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{24} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{34} \Gamma_3' \Gamma_3'') = 0.$$

Die Ausdrücke $\Gamma_i \Gamma_i' \Gamma_i''$ haben die folgende Bedeutung:

Zunächst ist

$$\Gamma_i = 0$$

die Ebene durch g und die Tetraederecke E_i. Sodann stellen die Gleichungen

$$\Gamma_i' = 0,$$
$$\Gamma_i'' = 0$$

die Polarebenen des Spurpunktes von g in der Tetraederebene E_i hinsichtlich der Flächen ψ und φ dar. Es sind dies die beiden Ebenen durch die reziproken Polaren g' und g'' von g in bezug auf ψ und φ, die den Punkt E_i enthalten. Von den vier Ausdrücken Γ_i und ebenso von den vier Ausdrücken Γ_i' und Γ_i'' sind also nur je zwei linear unabhängig.

Wir betrachten nun die vier Flächen zweiter Ordnung

$$\mathsf{M}_1 \equiv D_{21} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{31} \Gamma_3' \Gamma_3'' + D_{41} \Gamma_4' \Gamma_4'' = 0,$$
$$\mathsf{M}_2 \equiv D_{12} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{32} \Gamma_3' \Gamma_3'' + D_{42} \Gamma_4' \Gamma_4'' = 0,$$
$$\mathsf{M}_3 \equiv D_{13} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{23} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{43} \Gamma_4' \Gamma_4'' = 0,$$
$$\mathsf{M}_4 \equiv D_{14} \Gamma_1' \Gamma_1'' + D_{24} \Gamma_2' \Gamma_2'' + D_{34} \Gamma_3' \Gamma_3'' = 0.$$

Diese vier Flächen haben die folgenden Eigenschaften: Sie haben die beiden Geraden g' und g'' gemein und gehören einem Büschel an, dessen Grundkurve, da g' und g'' im allgemeinen windschief sind, in vier Gerade zerfällt. Die Flächen M_i und Θ_i berühren sich längs ihrer Schnittkurve mit der Ebene Γ_i. *Für g' und g'' als Erzeugende von M_i folgt hieraus, daß beide Gerade die Fläche Θ_i im Schnitt mit Γ_i berühren.*

Geht man analog von der Geraden g als Punktreihe aus, so findet man als Hüllflächen der ihren Punkten zugeordneten Flächen $\eta_i(\varkappa)$ durch ganz entsprechende Rechnung die vier Flächen zweiter Klasse:

$$\frac{D_{21}\,D_{31}\,D_{41}}{4\,a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}\cdot G_1^{\,2}-\left(\frac{D_{21}}{a_2b_2}G_2'G_2''+\frac{D_{31}}{a_3b_3}G_3'G_3''+\frac{D_{41}}{a_4b_4}G_4'G_4''\right)=0\,,$$

$$\frac{D_{12}\,D_{32}\,D_{42}}{4\,a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}\cdot G_2^{\,2}-\left(\frac{D_{12}}{a_1b_1}G_1'G_1''+\frac{D_{32}}{a_3b_3}G_3'G_3''+\frac{D_{42}}{a_4b_4}G_4'G_4''\right)=0\,,$$

$$\frac{D_{13}\,D_{23}\,D_{43}}{4\,a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}\cdot G_3^{\,2}-\left(\frac{D_{13}}{a_1b_1}G_1'G_1''+\frac{D_{23}}{a_2b_2}G_2'G_2''+\frac{D_{43}}{a_4b_4}G_4'G_4''\right)=0\,,$$

$$\frac{D_{14}\,D_{24}\,D_{34}}{4\,a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}\cdot G_4^{\,2}-\left(\frac{D_{14}}{a_1b_1}G_1'G_1''+\frac{D_{24}}{a_2b_2}G_2'G_2''+\frac{D_{34}}{a_3b_3}G_3'G_3''\right)=0\,.$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$G_1 = u_2\,p_{21}+u_3\,p_{31}+u_4\,p_{41}\,,$$

$$G_1' = \frac{u_2\,p_{34}}{a_2}+\frac{u_3\,p_{42}}{a_3}+\frac{u_4\,p_{23}}{a_4}\,,$$

$$G_1'' = \frac{u_2\,p_{34}}{b_2}+\frac{u_3\,p_{42}}{b_3}+\frac{u_4\,p_{23}}{b_4}\,.$$

Die Ausdrücke $G_i\,G_i'\,G_i''$ gehen durch zyklische Vertauschungen der Indizes $1,2,3,4$ aus $G_1\,G_1'\,G_1''$ hervor. Die p_{ik} sind Plückersche Strahlenkoordinaten der Geraden g.

Die Gleichungen der obigen vier Flächen sind identisch mit den Gleichungen der vier Flächen Θ_i in Ebenenkoordinaten.

Die Gleichungen

$$G_i = 0\,,$$
$$G_i' = 0\,,$$
$$G_i'' = 0$$

stellen die Spurpunkte der drei Geraden $g\,g'\,g''$ in den Ebenen des Koordinatentetraeders dar. Auch die Gleichung von Θ_i in Ebenenkoordinaten zeigt hiernach sofort, daß g' und g'' Tangenten dieser Fläche sind. Sie zeigt weiterhin, daß die

Tangentialebenen von Θ_i in den Berührungspunkten von g' und g'' den Spurpunkt von g in der Tetraederebene E_i enthalten.

Wir führen jetzt noch die vier Flächen zweiter Klasse ein:

$$\mathsf{N}_1 \equiv \frac{D_{21}}{a_2 b_2} G_2' G_2'' + \frac{D_{31}}{a_3 b_3} G_3' G_3'' + \frac{D_{41}}{a_4 b_4} G_4' G_4'' = 0,$$

$$\mathsf{N}_2 \equiv \frac{D_{12}}{a_1 b_1} G_1' G_1'' + \frac{D_{32}}{a_3 b_3} G_3' G_3' + \frac{D_{42}}{a_4 b_4} G_4' G_4'' = 0,$$

$$\mathsf{N}_3 \equiv \frac{D_{13}}{a_1 b_1} G_1' G_1'' + \frac{D_{23}}{a_2 b_2} G_2' G_2'' + \frac{D_{43}}{a_4 b_4} G_4' G_4'' = 0,$$

$$\mathsf{N}_4 \equiv \frac{D_{14}}{a_1 b_1} G_1' G_1'' + \frac{D_{24}}{a_2 b_2} G_2' G_2'' + \frac{D_{34}}{a_3 b_3} G_3' G_3'' = 0.$$

Die beiden Geraden g' und g'' liegen auf jeder der vier Flächen. Diese gehören einer Schar zweiter Klasse an, haben also vier Erzeugende gemein. Je zwei Flächen N_i und Θ_i berühren sich längs eines Kegelschnitts.

Schließlich mag die Gleichung der Fläche Θ_i noch in einer zweiten, später zu benutzenden Form aufgestellt werden. Zu dieser Gleichungsform gelangen wir für die Fläche Θ_4 auf dem folgenden Wege.

Wir fanden als Gleichung der Hüllfläche aller Flächen $\vartheta_4(\lambda)$, die den Ebenen des Büschels $(v + \lambda v')$ mit der Achse g zugeordnet sind:

$$\vartheta_4'^2 - 4\vartheta_4\vartheta_4'' = 0.$$

Wir wählen nun die Ebene (v') insbesondere so, daß sie die Ecke E_4 des gemeinsamen Polartetraeders von φ und ψ enthält. Ihre Koordinaten sind dann:

$$v_1' : v_2' : v_3' : v_4' = \pi_{14} : \pi_{24} : \pi_{34} : 0.$$

ϑ_4' und ϑ_4'' erhalten jetzt die Werte:

$$\vartheta_4' = x_4 \left[\frac{\pi_{14}}{D_{14}} (v_1 x_4 e_{44} - v_4 x_1 e_{14}) + \frac{\pi_{24}}{D_{24}} (v_2 x_4 e_{44} - v_4 x_2 e_{24}) + \frac{\pi_{34}}{D_{34}} (v_3 x_4 e_{44} - v_4 x_3 e_{34}) \right],$$

$$\vartheta_4'' = a_4 b_4 x_4^2 \left(\frac{\pi_{14}^2}{D_{14}} + \frac{\pi_{24}^2}{D_{24}} + \frac{\pi_{34}^2}{D_{34}} \right).$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$e_{ik} = a_i b_k + a_k b_i.$$

Damit ergibt sich für Θ_4 die Gleichung:

$$\Theta_i \equiv \left[\frac{\pi_{14}}{D_{14}} (v_1 x_1 e_{14} - v_4 x_1 e_{14}) + \frac{\pi_{24}}{D_{24}} (v_2 x_1 e_{44} - v_4 x_2 e_{24}) + \frac{\pi_{34}}{D_{34}} (v_3 x_4 e_{44} - v_4 x_3 e_{34}) \right]^2 - 4 a_i b_i \vartheta_i \left(\frac{\pi_{14}^2}{D_{14}} + \frac{\pi_{24}^2}{D_{24}} + \frac{\pi_{34}^2}{D_{34}} \right) = 0 .$$

Eine ganz entsprechende Darstellung ist natürlich für die Flächen $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$ möglich. Wir haben also das Resultat:

Die einer Geraden g entsprechende Fläche Θ_i läßt sich stets durch die Koordinaten einer beliebigen Ebene (v) durch g und durch die dieser Ebene entsprechende Fläche ϑ_i in einer der obigen analogen Form darstellen.

Diese Art der Darstellung läßt unmittelbar erkennen, daß eine jede Fläche ϑ_i, die einer Ebene durch g entspricht, von der dieser Geraden entsprechenden Fläche Θ_i längs eines Kegelschnittes berührt wird. Die Ebenen dieser Kegelschnitte bilden einen Büschel, dessen Achse der Tetraederebene E_i angehört.

Die Kongruenz C_i der reziproken Polaren einer beliebigen Geraden in bezug auf die Flächen eines Systems ω_i.

Da die Mannigfaltigkeit der Flächen eines Systems ω_i doppelt unendlich ist, so bilden die reziproken Polaren einer beliebigen Geraden g des Raumes in bezug auf die Flächen eines solchen Systems eine Kongruenz C_i.

Alle Geraden dieser Kongruenz schneiden die reziproke Polare g' von g hinsichtlich der Fläche ψ. Denn: Eine Fläche ω_i hat mit ψ einen doppeltzählenden Tangentialkegel gemein, dessen Scheitel der Punkt P_i ist. Legt man durch g diejenige Ebene, welche den Punkt P_i enthält, so ist ihr Pol T in bezug auf ψ zugleich Pol in bezug auf ω_i. Das bedeutet aber, daß die reziproken Polaren von g in bezug auf ψ und ω_i sich im Punkte T schneiden.

Wir wollen nunmehr, vom Punkte T auf g' ausgehend, die in ihm sich schneidenden Geraden der Kongruenz untersuchen. Die Polarebene von T in bezug auf ψ schneide in der Tetraederebene E_i die Gerade h_i aus. Soll nun die reziproke Polare von g in bezug auf eine Fläche ω_i den Punkt T enthalten, so muß für diese Fläche der Punkt P_i auf h_i liegen.

Es schneiden sich demnach in T die reziproken Polaren von g in bezug auf alle Flächen ω_i, für welche der Punkt P_i auf h_i liegt.

Legt man nun durch g eine beliebige Ebene Π, so ist der Ort ihrer Pole bezüglich aller Flächen ω_i, für welche der Punkt P_i auf h_i liegt, ein Kegelschnitt. Die Ebene dieses Kegelschnitts ist bestimmt durch die Gerade h_i und den Pol P_ψ von Π in bezug auf die Fläche ψ. Der Punkt P_ψ liegt auf g' und gehört dem Kegelschnitte an. Durch Projektion des Kegelschnittes vom Punkte T aus erhält man einen Kegel zweiter Ordnung. Die Erzeugenden dieses Kegels sind die durch T gehenden Geraden der Kongruenz C_i. Die Gerade TP_ψ, das heißt die Gerade g', gehört einem jeden solchen Kegel als Erzeugende an.

Führt man die zu dieser Betrachtung duale Betrachtung durch, so erhält man das Resultat, daß die in einer Ebene durch g' liegenden Geraden der Kongruenz einen Kegelschnitt umhüllen, welcher g' zur Tangente hat.

Die Kongruenz C_i ist damit von der Ordnung und Klasse zwei. Denn eine beliebige Ebene wird von g' in einem Punkte T geschnitten, und schneidet ihrerseits aus dem singulären Kegel der Kongruenz, dessen Scheitel in T liegt, zwei Erzeugende aus. Diese sind die beiden in der Ebene liegenden Geraden der Kongruenz.

Ein beliebiger Punkt bestimmt mit g' eine Ebene und in dieser zwei Tangenten an den singulären Kegelschnitt der Kongruenz.

Als Kongruenz von der zweiten Ordnung und Klasse ist C_i darstellbar als Schnitt eines quadratischen Komplexes mit dem speziellen linearen Komplex der Treffgeraden von g'. Ein solcher quadratischer Komplex läßt sich in der folgenden Weise angeben.

Wir betrachten die Gerade g wie früher als Achse eines Ebenenbüschels $(v + \lambda v')$. Es entspricht dann einer jeden Ebene $(v + \lambda v')$ eine Fläche $\vartheta_i(\lambda)$, den sämtlichen Ebenen des Büschels entspricht eine einfach unendliche Folge solcher Flächen. Es seien nun $\vartheta_i(\lambda)$ und $\vartheta_i(\lambda')$ zwei benachbarte Flächen dieser Folge. Dann gehören zu einem Punkte H ihrer Schnittkurve zwei benachbarte Ebenen $(v + \lambda v')$ und

$(v + \lambda' v')$, sowie zwei Flächen ω_i und ω_i' derart, daß jene Ebenen die Polarebenen von H in bezug auf ω_i und ω_i' sind. Die reziproke Polare von g in bezug auf ω_i ist nun bestimmt durch die Pole von $(v + \lambda v')$ und $(v + \lambda' v')$ in bezug auf diese Fläche, das heißt aber, durch den Punkt H und einen dazu benachbarten Punkt auf $\vartheta_i(\lambda')$. Sie ist demnach Tangente von $\vartheta_i(\lambda')$ im Punkte H. Nachdem H auf der Schnittkurve von $\vartheta_i(\lambda')$ mit der benachbarten Fläche $\vartheta_i(\lambda)$ liegt, ist sie zugleich Tangente an die Hüllfläche Θ_i der einfach unendlich vielen Flächen ϑ_i, welche den Ebenen des durch g bestimmten Büschels entsprechen.

Auf analytischem Wege gelangt man zu demselben Resultat wie folgt. Die reziproke Polare von g hinsichtlich einer festen Fläche ω_i sei d_i. Dann liegt der Pol einer Ebene $(v + \lambda v')$ des durch g bestimmten Büschels in bezug auf ω_i jedenfalls auf d_i, zugleich aber auf der jener Ebene entsprechenden Fläche $\vartheta_i(\lambda)$. Seine Koordinaten $y_1 y_2 y_3 y_4$ genügen also der Gleichung:

$$\vartheta_i(y) + \lambda \vartheta_i'(y) + \lambda^2 \vartheta_i''(y) = 0 .$$

Diese hat als Gleichung zweiten Grades in λ außer der Wurzel λ noch eine zweite Wurzel λ'. Der Wurzel λ' entspricht aber eine weitere Ebene des Büschels $(v + \lambda' v')$, sowie eine weitere Fläche zweiten Grades $\vartheta_i(\lambda')$. Die Schnittpunkte von $\vartheta_i(\lambda')$ mit d_i sind die Pole der Ebenen $(v + \lambda v')$ und $(v + \lambda' v')$ in bezug auf ω_i. Beide fallen in einen Punkt (z) zusammen, wenn ihre Polarebenen bezüglich ω_i zusammenfallen, wenn also die Gleichung

$$\vartheta_i(z) + \lambda \vartheta_i'(z) + \lambda^2 \vartheta_i''(z) = 0$$

als Gleichung zweiten Grades in λ eine Doppelwurzel λ_0 besitzt. Die entsprechende Fläche $\vartheta_i(\lambda_0)$ wird von d_i berührt. Für den Berührungspunkt (z) ergibt sich die Bedingung:

$$\vartheta_i'^2(z) - 4 \vartheta_i(z) \vartheta_i''(z) = 0 ,$$

d. h. der Punkt (z) gehört entweder der Ebene E_i oder der Fläche Θ_i an.

Es sind demnach die beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Der Punkt (z) gehört der Ebene E_i an. Diese schneidet aus $\vartheta_i(\lambda_0)$ den Kegelschnitt l_i aus. In diesem Falle ist d_i Sekante von l_i.

2. Der Punkt (z) liegt auf Θ_i. Θ_i und $\vartheta_i(\lambda_0)$ berühren sich aber längs eines Kegelschnitts, besitzen also in ihren gemeinsamen Punkten die gleiche Tangentialebene. Die Gerade d_i ist daher in diesem Falle Tangente an Θ_i.

Es kommt nun, solange die Fläche ω_i in sich dual, also nicht singulär ist, nur der zweite Fall in Betracht. Denn führt man mit Hilfe der Flächen $\eta_i(x)$ die zu der eben angestellten duale Betrachtung durch, so darf sich offenbar für die Gerade d_i keine weitere Bedingung ergeben. Die duale Betrachtung führt aber zu dem Resultat, daß d_i entweder den Kegel K_i oder die Fläche Θ_i berührt. Es folgt hieraus, daß d_i jedenfalls Tangente an Θ_i ist, solange ω_i nicht singulär ist.

Es läßt sich nun weiterhin zeigen, daß auch für eine singuläre Fläche ω_i die Gerade d_i als reziproke Polare von g bezüglich ω_i Tangente von Θ_i sein muß. Ist ω_i z. B. Kegelfläche, so ist d_i identisch mit dem Polstrahl derjenigen Ebene $(v + \lambda v')$ durch g, welche den Scheitel des Kegels ω_i enthält. Der Polstrahl liegt aber vollständig in der dieser Ebene entsprechenden Fläche $\vartheta_i(\lambda)$. d_i ist daher sowohl Sekante von l_i, als auch, da Θ_i und $\vartheta_i(\lambda)$ sich längs eines Kegelschnittes berühren, Tangente an Θ_i. Dual entsprechend zeigt man, daß auch die reziproken Polaren von g hinsichtlich der unter den Flächen ω_i enthaltenen Grenzflächen Tangenten an Θ_i sind.

Wir haben also den Satz: *Die reziproken Polaren einer beliebigen Geraden g in bezug auf die Flächen ω_i sind Tangenten an die durch g bestimmte Fläche* Θ_i. Sie gehören also einem Komplex zweiten Grades an, dem Tangentenkomplex der Fläche zweiter Ordnung Θ_i. Die Kongruenz C_i ist darstellbar als Schnitt dieses Komplexes mit dem speziellen linearen Komplex der Sekanten von g'. Θ_i ist Brennfläche der Kongruenz. Daß g' Tangente von Θ_i ist, würde nunmehr auch daraus folgen, daß g', wie oben gezeigt worden ist, der Kongruenz C_i angehört.

Die singulären Kegel von C_i sind identisch mit den Tangentialkegeln von Θ_i aus den Punkten von g'; die singulären Kegelschnitte von C_i sind Schnittkurve ihrer durch g' gehenden Ebene mit Θ_i. Alle Kegelschnitte berühren g' in dem nämlichen Punkte T, dem Berührungspunkte von g' mit Θ_i; alle Kegel berühren längs g' die nämliche Ebene Δ_i, die Tangentialebene von Θ_i im Punkte T_i. Der doppelt gezählte

Strahlbüschel mit dem Scheitel T_i, der in der Ebene Δ_i liegt, gehört als singulärer Fall sowohl zu den Kegeln wie zu den Kegelschnitten.

Der singuläre Kegel der Kongruenz C_i, dessen Scheitel ein Punkt T auf g' ist, wird erhalten durch Projektion eines Kegelschnitts in der durch die Gerade h_i und den Punkt P_ψ bestimmten Ebene vom Punkte T aus. Man erhält hiernach insbesondere eine doppelt zu zählende Ebene, wenn der Punkt T der Ebene jenes Kegelschnitts angehört. Dies ist der Fall, wenn die Geraden h_i und g' sich schneiden. Der betreffende Punkt T ist dadurch bestimmt, daß seine Polarebene bezüglich ψ den Schnittpunkt von g' mit der Tetraederebene E_i enthält. Hieraus folgt aber, daß der Punkt T selbst der durch g und die Tetraederecke E_i bestimmten Ebene angehört. Diese Ebene schneidet g' im Punkte T_i. Da h_i und g' sich schneiden, und h_i stets den Schnittpunkt von g mit der Ebene E_i enthält, so ist die durch h_i und P_ψ bestimmte Ebene identisch mit der Ebene Δ_i; denn Δ_i ist diejenige Ebene durch g', welche jenen Schnittpunkt enthält.

Der singuläre Kegel von C_i mit dem Scheitel T_i wird also erhalten durch Projektion eines in Δ_i gelegenen Kegelschnitts von T_i aus. Da T_i und Δ_i vereinigt liegen, so artet dieser Kegel in die doppeltgezählte Ebene Δ_i aus. Umgekehrt gehen alle in Δ_i liegenden Geraden der Kongruenz durch T_i. Der in dieser Ebene gelegene singuläre Kegelschnitt artet in den Doppelpunkt T_i aus.

Vertauschen die Flächen φ und ψ ihre Rolle, so tritt an Stelle der Kongruenz C_i eine Kongruenz D_i. Diese besteht aus allen Tangenten von Θ_i, welche die feste Tangente g'' dieser Flächen schneiden. Θ_i ist sonach auch Brennfläche von D_i.

Die beiden Kongruenzen C_i und D_i haben eine Regelfläche gemein. Diese wird gebildet von allen Tangenten der Fläche θ_i, die zugleich die beiden festen Tangenten g' und g'' treffen. Sie ist als Schnitt eines quadratischen Komplexes und zweier linearer Komplexe vom vierten Grade und zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades. Denn die beiden Flächen M_i und N_i berühren Θ_i längs eines Kegelschnitts und enthalten die Geraden g' und g''. Auf M_i und N_i liegt sonach je eine Schar

von Erzeugenden, die g' und g'' treffen und Θ_i berühren. Beide Scharen zusammen bilden jene Regelfläche vierten Grades.

Beziehungen zwischen den Flächen ϑ_i, η_i und Θ_i.

Die Flächen ϑ_i, η_i und Θ_i sind in der folgenden Weise definiert:

Jeder Ebene (v) des Raumes entspricht eine Fläche zweiter Ordnung ϑ_i als Ort ihrer Pole bezüglich der Flächen ω_i.

Jedem Punkt (y) des Raumes entspricht eine Fläche zweiter Klasse η_i als Hüllfläche seiner Polarebenen bezüglich der Flächen ω_i.

Jeder Geraden g des Raumes entspricht eine Fläche zweiten Grades Θ_i als Brennfläche der Kongruenz zweiter Ordnung und zweiter Klasse, der ihre reziproken Polaren bezüglich der Flächen ω_i angehören.

Die Mannigfaltigkeit der Flächen ϑ_i und η_i ist hiernach dreifach, die der Flächen Θ_i vierfach unendlich.

Es besteht nun zwischen den Flächen ϑ_i, η_i und Θ_i eine Reihe von Beziehungen, die sich sämtlich aus dem früher bewiesenen Satze herleiten lassen:

Die einer Geraden g entsprechende Fläche Θ_i ist einerseits Hüllfläche der einfach unendlich vielen Flächen η_i, die den Punkten von g zugeordnet sind, andererseits Hüllfläche der einfach unendlich vielen Flächen ϑ_i, die den Ebenen des durch g bestimmten Büschels zugeordnet sind.

Wir schließen hieraus:

1. Die einer Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i und die einer Geraden g zugeordnete Fläche Θ_i berühren sich längs eines Kegelschnitts, sobald g und (v) vereinigt liegen.

2. Die einem Punkte (y) zugeordnete Fläche η_i und die einer Geraden g zugeordnete Fläche Θ_i berühren sich längs eines Kegelschnitts, sobald g und (y) vereinigt liegen.

3. Die einer Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i und die einem Punkte (y) zugeordnete Fläche η_i schneiden sich in zwei Kegelschnitten, sobald (v) und (y) vereinigt liegen.

Der letzte dieser drei Sätze ist eine Folge der beiden ersten. Denn legt man in der Ebene (v) eine Gerade beliebig durch den Punkt (y), so wird die dieser Geraden entsprechende Fläche Θ_i auf Grund der beiden ersten Sätze sowohl von der

der Ebene (v) entsprechenden Fläche ϑ_i als von der dem Punkte (y) entsprechenden Fläche η_i längs eines Kegelschnitts berührt.

Weiter können wir ohne weiteres den Satz erschließen: *Die Hüllfläche der einfach unendlich vielen Flächen Θ_i, die den Geraden eines Büschels in der Ebene (v) mit dem Scheitel (y) entsprechen, zerfällt in die beiden Flächen ϑ_i und η_i, die der Ebene (v) und dem Punkte (y) zugeordnet sind.*

Wir betrachten nunmehr die den Punkten einer Ebene (v) zugeordneten Flächen η_i. Alle diese Flächen haben, wie früher gezeigt, den Kegel K_i zum Tangentialkegel; sodann schneiden sie auf Grund des dritten Satzes die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i in zwei Kegelschnitten. Sie bilden sonach jedenfalls eines der vier doppelt unendlichen Systeme derjenigen Flächen zweiten Grades, die den Kegel K_i längs eines Kegelschnittes berühren und die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i in zwei Kegelschnitten schneiden.

Andererseits gilt von den Flächen Θ_i, die den Geraden derselben Ebene (v) zugeordnet sind, dieses. Sie berühren die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i auf Grund des ersten Satzes längs eines Kegelschnittes. Sie schneiden aber auch den Kegel K_i in zwei Kegelschnitten; denn auf Grund des zweiten Satzes gibt es stets Flächen η_i, die eine beliebige Fläche Θ_i längs eines Kegelschnittes berühren. Jede Fläche η_i berührt aber ihrerseits den Kegel K_i längs eines Kegelschnittes. Es bilden sonach die den Geraden von (v) zugeordneten Flächen Θ_i offenbar eins der vier doppelt unendlichen Systeme von Flächen zweiten Grades, die den Kegel K_i in zwei Kegelschnitten schneiden und die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i längs eines Kegelschnittes berühren.

Nun stehen die vier Systeme von Flächen zweiten Grades, die von zwei festen Flächen zweiten Grades die eine längs eines Kegelschnittes berühren, die andere in zwei Kegelschnitten schneiden, in Beziehung zu den vier Kegeln des durch jene beiden Flächen bestimmten Büschels. Wir fragen daher zunächst nach den drei weiteren Kegeln, die dem durch den Kegel K_i und eine beliebige Fläche ϑ_i bestimmten Büschel angehören.

Sie bestimmen sich durch Auflösung einer Gleichung dritten Grades. Diese Gleichung erweist sich aber als redu-

zibel; sie zerfällt in eine Gleichung vom ersten und eine vom zweiten Grade. Damit ist nun einer der drei Kegel vor den beiden andern ausgezeichnet. Dieser zur Ebene (v) gehörige ausgezeichnete Kegel hat die Gleichung:

$$\Lambda_i \equiv 4\, a_i\, b_i\, \vartheta_i + v_i^{\,2} K_i = 0\,.$$

Wir wollen zeigen, daß die oben in Frage kommenden Systeme in beiden Fällen eben diesem Kegel entsprechen.

Zu diesem Zwecke zeigen wir zunächst, daß die Ebene des Kegelschnittes, längs dessen eine Fläche η_i den Kegel K_i berührt, dann und nur dann den Scheitel des Kegels Λ_i enthält, wenn der Punkt (y), dem η_i zugeordnet ist, der Ebene (v) an gehört.

Wir führen den Beweis für $i = 4$ wie folgt:

Die Gleichung des Kegels Λ_4 ist

$$\Lambda_4 \equiv 4\, a_4\, b_4\, \vartheta_4 + v_4^{\,2} K_4 = 0\,.$$

Dies läßt sich schreiben:

$$\Lambda_4 \equiv \frac{(v_4 x_1 e_{14} - v_1 x_4 e_{44})^2}{D_{14}} + \frac{(v_4 x_2 e_{24} - v_2 x_4 e_{44})^2}{D_{24}} + \frac{(v_4 x_3 e_{34} - v_3 x_4 e_{44})^2}{D_{34}} = 0,$$

wenn wir wieder setzen:

$$e_{ik} = a_i b_k + a_k b_i\,.$$

Der Scheitel des Kegels hat hiernach die Koordinaten:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \frac{v_1}{e_{14}} : \frac{v_2}{e_{24}} : \frac{v_3}{e_{34}} : \frac{v_4}{e_{44}}\,.$$

Die einem beliebigen Punkte (y) zugeordnete Fläche η_4 berührt nun den Kegel K_4 längs eines Kegelschnittes, dessen Ebene sich bestimmt als Polarebene des Scheitels E_4 von K_4 in bezug auf η_4. Die Koordinaten dieser Ebene sind aber:

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = y_1\, e_{14} : y_2\, e_{24} : y_3\, e_{34} : y_4\, e_{44}\,.$$

Es ist also, wenn ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3 + z_4 w_4 = \varrho\,(v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4).$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Ebene des Berührungskegelschnittes der Fläche η_4 mit dem Kegel K_4 dann und nur dann durch den Scheitel des Kegels Λ_4 geht, wenn der Punkt (y), dem η_4 zugeordnet ist, der Ebene (v) angehört.

Das Entsprechende ist jetzt noch für die Flächen Θ_4 nachzuweisen.

Nun wissen wir, daß die einer beliebigen Geraden g zugeordnete Fläche Θ_4 sich durch die Koordinaten einer be-

liebigen Ebene (v) durch g und durch die dieser Ebene entsprechende Fläche ϑ_4 in der folgenden Weise ausdrückt:

$$\Theta_4 \equiv \left(\frac{\pi_{14}}{D_{14}} (v_4 x_1 e_{14} - v_1 x_4 e_{44}) + \frac{\pi_{24}}{D_{24}} (v_4 x_2 e_{24} - v_2 x_4 e_{44}) + \frac{\pi_{34}}{D_{34}} (v_4 x_3 e_{34} - v_3 x_4 e_{44}) \right)^2 - 4 a_4 b_4 \vartheta_4 \left(\frac{\pi_{14}^2}{D_{14}} + \frac{\pi_{24}^2}{D_{24}} + \frac{\pi_{34}^2}{D_{34}} \right) = 0 .$$

Bei vorgegebener Ebene (v) ist eine solche Darstellung also dann und nur dann möglich, wenn die Gerade g der Ebene (v) angehört. In diesem Falle zeigt aber die Form der Darstellung unmittelbar, daß die Ebene des Kegelschnittes, längs dessen die Fläche Θ_4 die der Ebene (v) entsprechende Fläche ϑ_4 berührt, in der Tat den Scheitel des Kegels Λ_4 enthält.

Damit haben wir das folgende Resultat erlangt, das wir gleich allgemein für den Index i aussprechen:

Die den Punkten einer Ebene (v) zugeordneten Flächen η_i bilden das dem Kegel Λ_i entsprechende System der doppelt unendlich vielen Flächen zweiten Grades, die den Kegel K_i längs eines Kegelschnittes berühren und die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i in zwei Kegelschnitten schneiden.

Die den Geraden einer Ebene (v) zugeordneten Flächen Θ_i bilden das dem Kegel Λ_i entsprechende System der doppelt unendlich vielen Flächen zweiten Grades, die den Kegel K_i in zwei Kegelschnitten schneiden und die der Ebene (v) zugeordnete Fläche ϑ_i längs eines Kegelschnittes berühren.

Dem vorigen ganz analog beweist man die beiden weiteren Sätze:

Die den Ebenen eines Bündels mit dem Scheitel (y) zugeordneten Flächen ϑ_i bilden das dem Kegelschnitt k_i entsprechende System der doppelt unendlich vielen Flächen zweiten Grades, welche durch l_i gehen und die dem Punkte (y) zugeordnete Fläche η_i in zwei Kegelschnitten schneiden.

Die den Strahlen eines Bündels mit dem Scheitel (y) zugeordneten Flächen Θ_i bilden das dem Kegelschnitt k_i entsprechende System der doppelt unendlich vielen Flächen zweiten Grades, die l_i in zwei Punkten und die dem Punkte (y) zugeordnete Fläche η_i längs eines Kegelschnittes berühren.

Hierbei ist k_i Grenzfläche der durch den Kegelschnitt l_i und die betreffende Fläche η_i bestimmten Schar zweiter Klasse. Die Gleichung von k_i ist:

$$k_i \equiv 4\,\eta_i + y_i^2\, l_i = 0\,.$$

Man bestätigt nun leicht, daß die Kegel Λ_i in der Ebene E_i einen festen Kegelschnitt c_i ausschneiden, und daß entsprechend die Kegelschnitte k_i vom Punkte E_i aus durch einen festen Kegel Z_i projiziert werden. Die Gleichungen der vier Kegel Z_i und der vier Kegelschnitte c_i sind:

$$\mathsf{Z}_1 \equiv \frac{x_2^2\, a_2\, b_2\, D_{21}}{e_{12}^2} + \frac{x_3^2\, a_3\, b_3\, D_{31}}{e_{13}^2} + \frac{x_4^2\, a_4\, b_4\, D_{41}}{e_{14}^2} = 0\,,$$

$$\mathsf{Z}_2 \equiv \frac{x_1^2\, a_1\, b_1\, D_{12}}{e_{12}^2} + \frac{x_3^2\, a_3\, b_3\, D_{32}}{e_{23}^2} + \frac{x_4^2\, a_4\, b_4\, D_{42}}{e_{24}^2} = 0\,,$$

$$\mathsf{Z}_3 \equiv \frac{x_1^2\, a_1\, b_1\, D_{13}}{e_{13}^2} + \frac{x_2^2\, a_2\, b_2\, D_{23}}{e_{23}^2} + \frac{x_4^2\, a_4\, b_4\, D_{43}}{e_{34}^2} = 0\,,$$

$$\mathsf{Z}_4 \equiv \frac{x_1^2\, a_1\, b_1\, D_{14}}{e_{14}^2} + \frac{x_2^2\, a_2\, b_2\, D_{24}}{e_{24}^2} + \frac{x_3^2\, a_3\, b_3\, D_{34}}{e_{34}^2} = 0\,.$$

$$c_1 \equiv \frac{u_2^2\, D_{21}}{e_{12}^2} + \frac{u_3^2\, D_{31}}{e_{13}^2} + \frac{u_4^2\, D_{41}}{e_{14}^2} = 0\,,$$

$$c_2 \equiv \frac{u_1^2\, D_{12}}{e_{12}^2} + \frac{u_3^2\, D_{32}}{e_{23}^2} + \frac{u_4^2\, D_{42}}{e_{24}^2} = 0\,,$$

$$c_3 \equiv \frac{u_1^2\, D_{13}}{e_{13}^2} + \frac{u_2^2\, D_{23}}{e_{23}^2} + \frac{u_4^2\, D_{43}}{e_{34}^2} = 0\,,$$

$$c_4 \equiv \frac{u_1^2\, D_{14}}{e_{14}^2} + \frac{u_2^2\, D_{24}}{e_{24}^2} + \frac{u_3^2\, D_{34}}{e_{34}^2} = 0\,.$$

Damit ergeben sich aber bei Anwendung der für die Flächen ω abgeleiteten Sätze sofort die folgenden Eigenschaften für die Flächen $\vartheta_i \eta_i$ und Θ_i:

Eine jede Fläche Θ_i schneidet den Kegel K_i in zwei Kegelschnitten, deren Ebenen den Kegelschnitt c_i berühren.

Eine jede Fläche Θ_i hat mit dem Kegelschnitt l_i zwei Tangentialkegel zweiter Ordnung gemein, deren Scheitel dem Kegel Z_i angehören.

Zwei Flächen η_i und ϑ_i, für welche der Punkt (y) und die Ebene (v) vereinigt liegen, haben einerseits zwei Kegelschnitte, andererseits zwei Tangentialkegel zweiter Ordnung gemein. Die Ebenen der beiden Kegelschnitte berühren den Kegelschnitt c_i, die Scheitel der beiden Kegel liegen auf dem Kegel Z_i.

Weiterhin ergibt sich das Folgende für die unter den Flächen $\vartheta_i \eta_i$ und Θ_i enthaltenen singulären Flächen:

Unter den dreifach unendlich vielen Flächen ϑ_i befinden sich doppelt unendlich viele Kegel zweiter Ordnung. Diese enthalten sämtlich den Kegelschnitt l_i. Ortsfläche ihrer Scheitel ist der Kegel Z_i, denn diesem gehören alle Kegelschnitte k_i an. Die unter den Flächen ϑ_i enthaltenen Kegel sind hiernach identisch mit den Kegeln zweiter Ordnung, die den Kegelschnitt l_i aus den Punkten des Kegels Z_i projizieren.

Entsprechend sind die unter den Flächen η_i enthaltenen Kegelschnitte identisch mit den Kegelschnitten von K_i, die von den Tangentialebenen des Kegelschnittes c_i ausgeschnitten werden.

Unter den Flächen Θ_i befinden sich dreifach unendlich viele Kegel zweiter Ordnung und dreifach unendlich viele Kegelschnitte. Die Scheitel dieser Kegel liegen auf dem Kegel Z_i, die Ebenen der Kegelschnitte berühren den Kegelschnitt c_i. Jeder Punkt von Z_i ist Scheitel für einfach unendlich viele Kegel Θ_i, in jeder Tangentialebene von c_i liegen einfach unendlich viele Kegelschnitte Θ_i.

Schließlich gibt es unter den vierfach unendlich vielen Flächen Θ_i einfach unendlich viele Ebenenpaare und einfach unendlich viele Punktepaare. Die Bedingung dafür, daß Θ_i in ein Ebenenpaar ausartet, ergibt sich aus der folgenden Überlegung.

Wir wissen, daß die einer Geraden g entsprechende Fläche Θ_i Hüllfläche der einfach unendlich vielen Flächen ϑ_i ist, die den Ebenen des durch g bestimmten Büschels zugeordnet sind. Diese Hüllfläche artet dann in ein Ebenenpaar aus, wenn die betreffenden Flächen ϑ_i sämtlich Kegel zweiter Ordnung sind, deren Scheitel in einer Geraden liegen. Nun haben wir gesehen, daß die einer Ebene (v) entsprechende Fläche ϑ_i Kegelfläche ist, sobald (v) den Kegelschnitt l_i berührt. Wählt man daher als Gerade g eine beliebige Tangente von l_i, so sind alle Flächen ϑ_i, die den Ebenen des durch g bestimmten Büschels entsprechen, Kegel zweiter Ordnung. Man zeigt auch leicht, daß die Scheitel aller dieser Kegel auf einer Geraden liegen. Es entspricht also einer jeden Geraden g, die Tangente von l_i ist, eine Fläche Θ_i, die in ein Ebenenpaar ausartet. Die Gerade, auf der die Scheitel der Kegelflächen ϑ_i liegen, ist die Achse des Ebenenpaars. Nachdem aber die

Scheitel aller unter den Flächen ϑ_i enthaltenen Kegel auf dem Kegel Z_i liegen, ist sie zugleich Erzeugende von Z_i.

Wir haben also den Satz:

Die Erzeugenden des Kegels Z_i sind die Achsen der unter den Flächen Θ_i enthaltenen einfach unendlich vielen Ebenenpaare.

Analog sind die Tangenten des Kegelschnitts c_i die Achsen der unter den Flächen Θ_i enthaltenen einfach unendlich vielen Punktepaare. Diese Punktepaare entsprechen als singuläre Fälle der Flächen Θ_i den Erzeugenden des Kegels K_i.

Endlich ergeben sich für die Mittelpunkte der Flächen ϑ_i η_i und Θ_i auf Grund der für die Flächen ω_i abgeleiteten Sätze die folgenden Beziehungen, die in allgemeinerer Form für die Pole einer beliebigen Ebene und entsprechend für die Polarebenen eines beliebigen Punktes gelten.

Die Mittelpunkte aller Flächen η_i, die den Punkten einer Ebene (v) zugeordnet sind, und die Mittelpunkte aller Flächen Θ_i, die den Geraden derselben Ebene zugeordnet sind, erfüllen die nämliche Fläche zweiter Ordnung. Diese enthält auch den Mittelpunkt der der Ebene (v) entsprechenden Fläche ϑ_i und den Scheitel E_i des Kegels K_i, während ihr eigener Mittelpunkt die Strecke dieser beiden Punkte halbiert.

Die Mittelpunkte aller Flächen ϑ_i, die den Ebenen eines Bündels mit dem Scheitel (y) zugeordnet sind, und die Mittelpunkte aller Flächen Θ_i, die den Geraden des Strahlenbündels mit demselben Scheitel zugeordnet sind, erfüllen die nämliche Fläche zweiter Ordnung. Diese enthält auch den Mittelpunkt der dem Punkt (y) entsprechenden Fläche η_i, sowie den Mittelpunkt des Kegelschnitts l_i, während ihr eigener Mittelpunkt die Strecke dieser beiden Punkte halbiert.

Die Mittelpunkte aller Flächen Θ_i, die den Geraden eines Büschels in der Ebene (v) mit dem Scheitel (y) zugeordnet sind, liegen auf einer Raumkurve vierter Ordnung. Diese enthält auch die Mittelpunkte der beiden Flächen ϑ_i und η_i, die der Ebene (v) mit dem Punkt (y) entsprechen. Dieser Satz folgt sofort aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

Zum Schlusse möchte ich mir gestatten, Herrn Geheimrat Professor Dr. Rohn für seine zahlreichen freundlichen Anregungen und Ratschläge Dank zu sagen.

Lebenslauf.

Ich, Karl Gustav Georg Max Petri, wurde am 22. August 1888 als Sohn des Kaufmanns Georg Max Petri zu Leipzig geboren. Ich besuchte die Thomasschule zu Leipzig, die ich Ostern 1908 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Seitdem habe ich an den Universitäten Lausanne, Kiel und Leipzig Mathematik und Naturwissenschaften studiert.